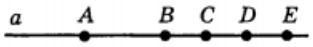
Вариант 1

Часть 1

1. Найдите ошибку в записи длин отрезков. (Укажите номер этого отрезка.)
1) $AB = 15$ см; 2) $CD = -7$ см; 3) $EF = 9$ см; 4) $GH = 6$ см.

2. На прямой a последовательно отмечены точки A, B, C, D и E так, что $BC = CD = DE$, а $AB = 2DE$. Укажите середину отрезка AD.



1) Точка B; 2) точка C; 3) точка D; 4) точка A.

3. Точка D — середина отрезка AB, точка C — середина отрезка BD. Найдите длину отрезка AB, если $CD = 5$ см.
1) 5 см; 2) 10 см; 3) 15 см; 4) 20 см.

4. Определите, какой угол образуют биссектрисы вертикальных углов, образовавшихся при пересечении двух прямых.
1) Острый; 2) прямой; 3) тупой; 4) развернутый.

5. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.
От данного луча отложены $\angle ABC = 56°$ *и* $\angle ABD = 43°$. *Найдите* $\angle DBC$.
1) Одно; 2) два; 3) три; 4) ни одного.

Часть 2

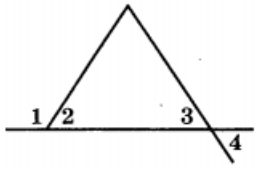
6. Найдите угол, если сумма двух смежных с ним углов равна 210°.

7. Точка B лежит на прямой AF между точками A и F. Известно, что $AB = 4$ см, а BF на 7 см больше. Определите длину отрезка AF.

8. Из точки O выходят четыре луча OA, OB, OC и OD. Каждый из углов AOB и COD является смежным с углом BOC. Найдите угол BOC, если угол AOD равен 68°.

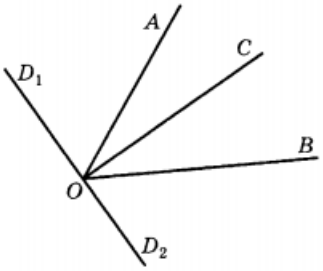
9. Отрезок, равный 45 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 27 см. Найдите длину среднего отрезка.

10. На рисунке: угол 1 равен 163°; $\angle 2 = \angle 3$. Найдите угол 4.



11. Углы AOC и BOC — смежные, луч OD лежит внутри угла AOC так, что угол AOD — прямой. Найдите угол COD, если $\angle BOC = 18°$.

12. Через вершину угла AOB, равного 40°, проведена прямая D_1D_2 так, что $\angle AOD_2 = 110°$. Найдите угол между прямой D_1D_2 и прямой, содержащей биссектрису OC данного угла.



Часть 3

13. На прямой расположены пять точек A, B, C, D и E так, что $AC = 5$ см, $AE = 4$ см, $BC = 14$ см, $BD = 2$ см, $DE = 3$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков BD и AC.

14. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка так, что конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго — серединой третьего. Найдите длину меньшего отрезка, если сумма длин всех отрезков равна 28 см.

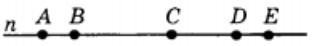
15. Какое наибольшее число лучей может выходить из одной точки, чтобы все углы, ограниченные соседними лучами, были тупые.

Вариант 2

Часть 1

1. Найдите ошибку в записи длин отрезков. (Укажите номер этого отрезка.)
1) $AB = 12$ см; 2) $CD = 7$ см; 3) $EF = -10$ см; 4) $NM = 4$ см.

2. На прямой n последовательно отмечены точки A, B, C, D и E так, что $BC = 3AB$, $CD = 2AB$ и $AB = DE$. Укажите середину отрезка BE.



1) Точка B; 2) точка C; 3) точка D; 4) точка E.

3. Точка D — середина отрезка AB, точка C — середина отрезка BD. Найдите длину отрезка AC, если $AB = 24$ см.
1) 18 см; 2) 12 см; 3) 6 см; 4) 24 см.

4. Определите, какой угол образуют биссектрисы смежных углов.
1) Острый; 2) прямой; 3) тупой; 4) развернутый.

5. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.
На прямой от точки A отложены отрезки AB = 13 см и AC = 8 см. Найдите длину отрезка BC.
1) Одно; 2) два; 3) три; 4) решений нет.

Часть 2

6. Разность двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 36°. Найдите больший угол.

_____

7. Точка B лежит на прямой AF между точками A и F. Известно, что отрезок AB на 3 см меньше отрезка BF. Определите длину отрезка AB, если отрезок AF равен 19 см.

_____

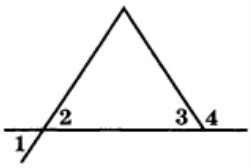
8. Из точки O выходят четыре луча AO, OB, OC и OD. Лучи OA и OC лежат на одной прямой, а углы AOB и AOD — смежные. Найдите угол AOB, если угол COD равен 78°.

_____

9. Отрезок, равный 25 см, разделен на три неравных отрезка. Средний отрезок равен 11 см. Найдите расстояние между серединами крайних отрезков.

_____

10. На рисунке угол 1 равен 53°; $\angle 2 = \angle 3$. Найдите угол 4.

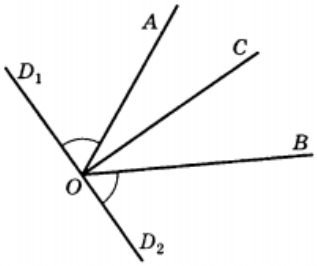


_____

11. Углы AOC и BOC — смежные, луч OD — биссектриса угла AOC. Найдите угол BOD, если $\angle AOC = 108°$.

_____

12. Через вершину угла AOB, равного 40°, проведена прямая D_1D_2 так, что $\angle AOD_1 = \angle BOD_2 = 70°$. Найдите угол между прямой D_1D_2 и прямой, содержащей биссектрису OC данного угла.



_____

Часть 3

13. На прямой расположены пять точек A, B, C, D и E так, что $AC = 5$ см, $AE = 4$ см, $BC = 14$ см, $BD = 2$ см, $DE = 3$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков BD и EC.

14. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка так, что конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго — серединой третьего. Найдите длину большего отрезка, если сумма длин всех отрезков равна 28 см.

15. Какое наибольшее число лучей можно провести из одной точки так, чтобы все углы, ограниченные соседними лучами, были прямые.

Ответы и решения.

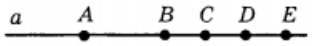
Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 2.

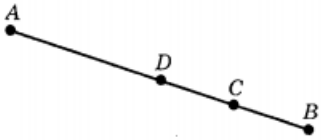
Решение. Длина отрезка выражается положительным числом. Следовательно, ошибка допущена в записи длины отрезка CD.

2. Ответ: 1.



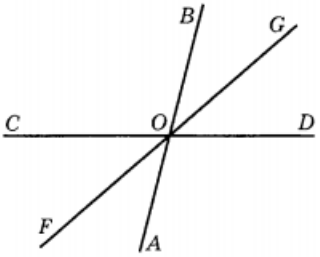
Решение. Так как последовательность расположения точек B и C на отрезке AD заданы по условию задачи, то точки B и C делят отрезок AD на три отрезка: AB, BC и CD, при этом по условию $AB = 2DE$, $BC = CD = DE$. Значит, $BD = 2DE$. Таким образом, $AB = BD$. Отсюда точка B — середина отрезка AD.

3. Ответ: 4.



Решение. Так как точка D делит отрезок AB на два равных отрезка: AD и DB, то $AB = AD + DB = 2DB$, аналогично, точка C делит отрезок DB на два равных отрезка: CD и CB, $DB = CD + CB = 2CB$. Следовательно, $AB = 2DB = 4CB = 20$ см.

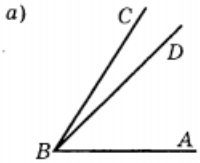
4. Ответ: 4.

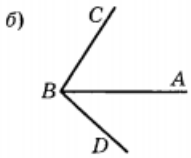


Решение. Рассмотрим вертикальные углы $\angle DOB$ и $\angle AOC$. Луч OG — биссектриса $\angle DOB$. Продолжим луч OG за точку O, получим прямую GF. В силу теоремы о вертикальных углах $\angle BOG = \angle AOF$, а $\angle GOD = \angle FOC$, но $\angle BOG = \angle GOD$, значит, $\angle AOF = \angle FOC$. Следовательно, луч OF — биссектриса $\angle AOC$ и лежит на одной прямой с лучом OG — биссектрисой $\angle DOB$. Отсюда биссектрисы двух пар вертикальных углов образуют развернутый угол, т.е. $\angle GOF = 180°$.

5. Ответ: 2.

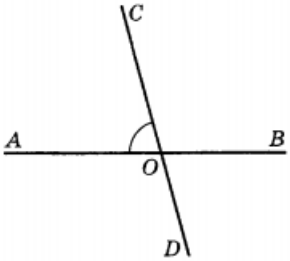
Анализируем условие задачи. Значение угла DBC зависит от расположения данного луча BD, т. е. от того, как отложены углы $\angle ABC$ и $\angle ABD$ от данного луча BA в одну полуплоскость относительно прямой, содержащей луч BA (рис. *а*), или в разные (рис. *б*).





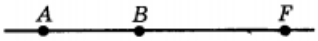
Часть 2

6. Ответ: 75.



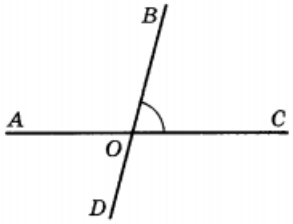
Решение. По условию задачи углы COB и AOD смежные с углом AOC, при этом $\angle COB + \angle AOD = 210°$. Так как углы $\angle COB$ и $\angle AOD$ смежные с одним и тем же углом AOC, значит, они равны, $\angle COB = \angle AOD = 105°$ и $\angle COB + \angle AOC = 180°$. Отсюда $\angle AOC = 180° - \angle COB = 180° - 105° = 75°$.

7. Ответ: 15.



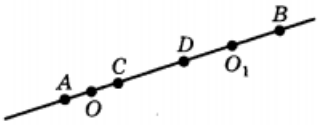
Решение. По условию задачи точка B лежит между точками A и F, следовательно, она принадлежит отрезку AF. Известно, что, если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков: $AF = AB + BF$. Кроме того, известно, что $AF = AB + 7$. Отсюда $AF = AB + AB + 7 = 2AB + 7 = 8 + 7 = 15$ (см). Значит, $AF = 15$ см.

8. Ответ: 68.



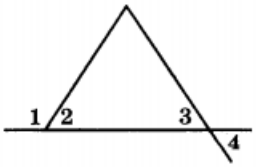
Решение. По условию задачи углы AOB и COD смежные с одним и тем же углом BOC, значит, сторона OA является продолжением стороны OC, а сторона OD является продолжением стороны OB. Таким образом стороны угла AOD являются продолжением сторон угла BOC, значит, углы AOD и BOC — вертикальные и они равны: $\angle BOC = \angle AOD = 68°$.

9. Ответ: 9.



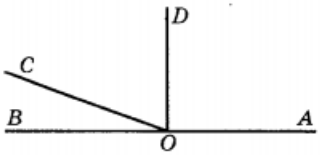
Решение. Отрезок AB точками C и D разделен на отрезки AC, CD и DB, тогда по свойству измерения отрезков $AB = AC + CD + DB$. Точки O и O_1 являются серединами отрезков AC и DB. Значит, $AB = AO + OO_1 + O_1B$ и $AO = OC$ и $DO_1 = O_1B$. По условию задачи $AB = 45$ см и $OO_1 = 27$ см, отсюда $AO + BO_1 = AB - OO_1 = 45 - 27 = 18$ (см) и $OO_1 = OC + CD + DO_1$, отсюда $27 = CD + 18$, $CD = 27 - 18 = 9$ (см).

10. Ответ: 17.



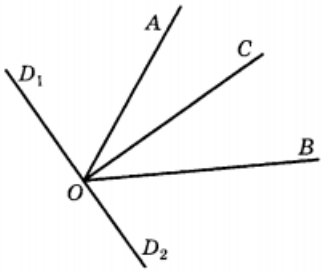
Решение. Углы 1 и 2 смежные, по теореме о смежных углах $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 163° = 17°$. По условию $\angle 2 = \angle 3$, значит, $\angle 3 = 17°$. Углы 3 и 4 вертикальные, по теореме о вертикальных углах $\angle 3$ и $\angle 4$ равны, значит, $\angle 4 = 17°$.

11. Ответ: 72.



Решение. Углы BOD и AOD смежные. По условию задачи угол AOD — прямой, значит, по теореме о смежных углах и угол BOD — прямой. Так как $\angle BOC = 18°$, то $\angle COD = \angle BOD - \angle BOC = 90° - 18° = 72°$.

12. Ответ: 90.



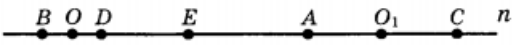
Решение. Так как луч OC — биссектриса угла AOB, то углы AOC и COB равны. По условию угол AOB равен 40°, значит, каждый из углов AOC и COB равен 20°. Так как луч OC проходит между сторонами угла AOD_2, то угол AOD_2 равен сумме углов AOC и COD_2, т. е. $\angle AOD_2 = \angle AOC + \angle COD_2$, отсюда $\angle COD_2 = \angle AOD_2 - \angle AOC = 110° - 20° = 90°$.

Часть 3

13. Ответ: 10,5.

Анализируем условие задачи:

Сначала заметим, что все отрезки лежат на одной прямой n и сумма отрезков $AC = 5$ см, $AE = 4$ см, $BD = 2$ см и $DE = 3$ см равна отрезку $BC = 14$ см. На отрезке BC от точки B отложим отрезок $BD = 2$ см, а от точки C — отрезок $AC = 5$ см. Так как точки A и D делят отрезок BC на три отрезка, то длина всего отрезка BC равна сумме длин трех отрезков BD, DA и AC: $BC = BD + DA + AC$. Отсюда $DA = BC - (BD + AC) = 14 - (2 + 5) = 7$ (см). Теперь заметим, что точка E делит DA на два отрезка DE и AE, значит, длина всего отрезка DA должна быть равна сумме длин отрезков DE и AE. По условию $DE = 3$ см, $AE = 4$ см, т. е. отрезок $DA = DE + AE = 3 + 4 = 7$ (см). Таким образом, последовательность точек на прямой n: B, D, E, A и C.

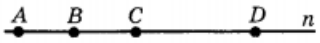


Решение. Так как по свойству измерения отрезков $BC = BD + DA + AC$. Точки O и O_1 являются серединами отрезков BD и AC. Значит, $BO = OD = 1$ см и $AO_1 = O_1C = 2{,}5$ см; отсюда $BC = BO + OD + DA + AO_1 + O_1C = OB + (OD + DA + AO_1) + O_1C = OB + OO_1 + O_1C$, $OO_1 = BC - (OB + O_1C) = 14 - (1 + 2{,}5) = 10{,}5$ (см).

14. Ответ: 4.

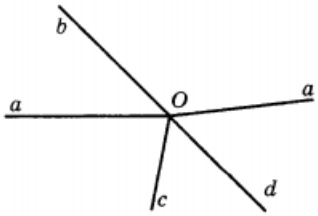
Анализируем условие задачи:

На прямой n от одной точки (точка A) в одном направлении (все вторые концы отрезков лежат на одном луче с началом в точке A) отложены отрезки: AB, AC и AD.



Решение. Пусть $AB = x$, тогда $AC = 2x$, так как точка B является серединой отрезка AC, следовательно, $AD = 4x$, так как точка C является серединой отрезка AD. Отсюда: $AB + AC + AD = x + 2x + 4x = 28$; $x = 4$ (см).

15. Ответ: 3.



Решение. Предположим, что из одной точки O выходят четыре луча a, b, c и d. Проведем луч a', который дополняет луч a до прямой. Пусть $\angle(ab)$ — тупой, тогда $\angle(ba')$ — острый, так как углы смежные. Отсюда следует, что если $\angle(bc)$ — тупой, то лучи b и c лежат в разных полуплоскостях относительно прямой aa'. Луч d лежит между лучами a и c, т.е. $\angle(ac) = \angle(ad) + \angle(dc)$. $\angle(ac) < 180°$, так как $\angle(a'c)$ и $\angle(ac)$ — смежные углы. Значит, один из углов $\angle(ad)$ или $\angle(dc)$ меньше 90°.

Предположим, что $\angle(ad)$ и $\angle(dc)$ — тупые, т.е. $\angle(ad) > 90°$ и $\angle(dc) > 90°$, тогда $\angle(ad) + \angle(dc) > 180°$, отсюда $\angle(ac) = \angle(ad) + \angle(dc) > 180°$. Пришли к противоречию. Значит, углы $\angle(ab)$, $\angle(bc)$ и $\angle(ac)$ — тупые и они образуют три луча a, b и c.

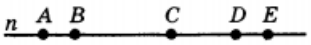
Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 3.

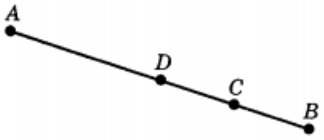
Решение. Длина отрезка выражается положительным числом. Следовательно, ошибка допущена в записи длины отрезка EF.

2. Ответ: 2.



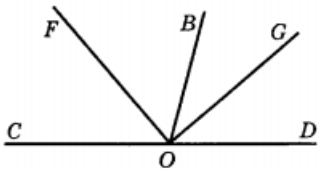
Решение. Так как последовательность расположения точек C и D на отрезке BE задана по условию задачи, то точки C и D делят отрезок BE на три отрезка: BC, CD и DE, при этом по условию $AB = DE$, значит, $BC = 3AB = 3DE$ и $CD = 2AB = 2DE$. Отсюда $CE = CD + DE = 2DE + DE = 3DE$. Отсюда точка C — середина отрезка BE.

3. Ответ: 1.



Решение. Так как точка D делит отрезок AB на два равных отрезка: AD и DB, то $AB = AD + DB = 2DB$, $DB = 12$ (см). Аналогично, точка C делит отрезок DB на два равных отрезка: CD и CB, то $DB = CD + CB = 2CB$, $CB = 6$ (см). Так как точка D — середина отрезка AB, точка C — середина отрезка BD, следовательно, $AC = AD + DC = 12 + 6 = 18$ (см).

4. Ответ: 2.



Решение. Рассмотрим смежные углы $\angle DOB$ и $\angle BOC$, для которых OG и OF являются биссектрисами. Пусть $\angle BOD = \alpha$, тогда $\angle BOC = 180° - \alpha$, $\angle BOG = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle BOF = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \alpha$. Значит, $\angle GOF = 90°$, т.е. прямой.

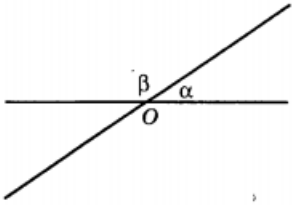
5. Ответ: 2.

Анализируем условие задачи. Значение длины отрезка BC зависит от расположения точки C по отношению к точке A, т. е. отложен отрезок AC на луче AB или на луче, дополняющим луч AB до прямой.

а) б)

Часть 2

6. Ответ: 108.



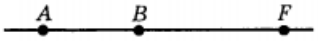
Решение. Два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные углы. Углы $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ не могут быть вертикальными, так как по условию они не равны: их разность равна 36°. Значит, $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ — смежные углы.

По теореме о смежных углах $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$, а по условию задачи $\angle\alpha - \angle\beta = 36°$.

$$\begin{cases}\angle\alpha - \angle\beta = 36°,\\ \angle\alpha + \angle\beta = 180°;\end{cases}\ \angle\alpha = 36° + \angle\beta;\ 36° + \angle\beta + \angle\beta = 180°;\ 2\angle\beta = 144°;\ \angle\beta = 72°.$$

$\angle\alpha = 36° + \angle\beta = 36° + 72°$, $\angle\alpha = 108°$.

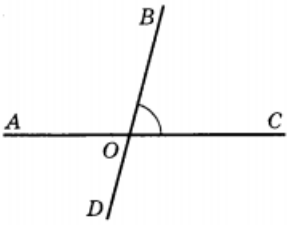
7. Ответ: 8.



Решение. По условию задачи точка B лежит между точками A и F, следовательно, она принадлежит отрезку AF. Кроме того, известно, что $AB = BF - 3$. Известно, что, если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков: $AF = AB + BF$. Отсюда $AB = AF - BF$, значит $BF - 3 = 19 - BF$.

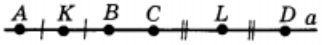
Отсюда $2BF = 22$, $BF = 11$ (см). Значит, $BF = 11$ см, $AB = 8$ см.

8. Ответ: 78.



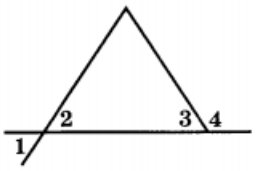
Решение. По условию задачи углы AOB и AOD смежные. Так как OA и OC лежат на одной прямой, а сторона OB является общей, то углы AOB и BOC — смежные. Таким образом, углы AOD и BOC смежные с одним и тем же углом AOB, значит, и сторона OD является продолжением стороны OB. Значит, углы AOB и DOC — вертикальные и, следовательно, они равны. $\angle AOB = \angle DOC = 78°$.

9. Ответ: 18.



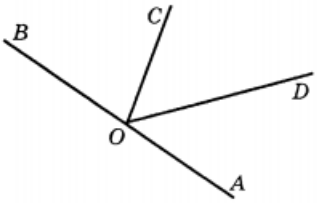
Решение. Отрезок AD точками B и C разделен на отрезки AB, BC и CD, тогда по свойству измерения отрезков $AD = AB + BC + CD$. Точки K и L являются серединами отрезков AB и CD, $AK = KB$ и $CL = LD$. Значит, $AD = AK + KB + BC + CL + LD$, $AD = (AK + LD) + BC + (KB + CL) = 2(AK + LD) + BC$. По условию задачи $AD = 25$ см и $BC = 11$ см, отсюда $2(AK + LD) = AD - BC = 25 - 11 = 14$ (см) и $AK + LD = 7$ (см). С другой стороны $AD = AK + KL + LD$, отсюда $KL = AD - (AK + LD) = 25 - 7 = 18$ (см).

10. Ответ: 127.



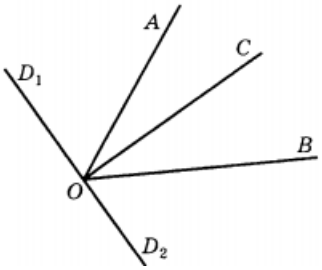
Решение. Углы 1 и 2 вертикальные, по теореме о вертикальных углах $\angle 1 = \angle 2 = 53°$. По условию $\angle 2 = \angle 3$, значит, $\angle 3 = 53°$. Углы 3 и 4 смежные, по теореме о смежных углах $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, значит, $\angle 4 = 180° - 53° = 127°$.

11. Ответ: 126.



Решение. Углы BOC и AOC смежные, по теореме о смежных углах $\angle BOC + \angle AOC = 180°$, значит $\angle BOC = 180° - 108° = 72°$. По условию задачи луч OD — биссектриса угла AOC, значит, $\angle COD = \angle AOD = 54°$. Луч OC делит угол BOD на два угла BOC и COD, значит, $\angle BOD = \angle BOC + \angle COD = 72° + 54° = 126°$.

12. Ответ: 90



Решение. Так как луч OC — биссектриса угла AOB, то углы AOC и COB равны. По условию угол AOB равен 40°, значит, $\angle AOC = \angle COB = 20°$. По условию $\angle BOD_2 = 70°$. Так как луч OB проходит между сторонами угла COD_2, то угол COD_2 равен сумме углов COB и BOD_2, т. е. $\angle COD_2 = \angle COB + \angle BOD_2 = 20° + 70° = 90°$.

Часть 3

13. Ответ: 8,5.

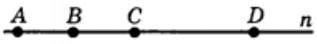
Анализируем условие задачи:

Сначала заметим, что все отрезки лежат на одной прямой n и сумма отрезков $AC = 5$ см, $AE = 4$ см, $BD = 2$ см и $DE = 3$ см равна отрезку $BC = 14$ см. На отрезке BC от точки B отложим отрезок $BD = 2$ см, а от точки C — отрезок $AC = 5$ см. Так как точки A и D делят отрезок BC на три отрезка, то длина всего отрезка BC равна сумме длин трех отрезков BD, DA и AC: $BC = BD + DA + AC$. Отсюда $DA = BC - (BD + AC) = 14 - (2 + 5) = 7$ (см). Теперь заметим, что точка E делит отрезок DA на два отрезка DE и AE, значит, длина всего отрезка DA должно быть равна сумме длин отрезков DE и AE. По условию $DE = 3$ см, $AE = 4$ см, то есть отрезок $DA = DE + AE = 3 + 4 = 7$ (см). Таким образом, последовательность точек на прямой n: B, D, E, A и C.

Решение. Так как по свойству измерения отрезков $EC = EA + AC = 4 + 5 = 9$ (см) и $BC = BD + DE + EC$. Точки O и O_1 являются серединами отрезков BD и EC. Значит, $BO = OD = 1$ см и $EO_1 = O_1C = 4{,}5$ см; отсюда $BC = BO + OD + DE + EO_1 + O_1C = OB + (OD + DE + EO_1) + O_1C = OB + OO_1 + O_1C$, $OO_1 = BC - (OB + O_1C) = 14 - (1 + 4{,}5) = 8{,}5$ (см).

14. Ответ: 16.

Анализируем условие задачи:



На прямой n от одной точки (точка A) в одном направлении (все вторые концы отрезков лежат на одном луче с началом в точке A) отложены отрезки: AB, AC и AD.

Решение. Пусть $AB = x$, тогда $AC = 2x$, так как точка B является серединой отрезка AC, следовательно, $AD = 4x$, так как точка C является серединой отрезка AD. Отсюда: $AB + AC + AD = x + 2x + 4x = 28$, $x = 4$ (см). Самый большой отрезок $AD = 4x = 16$ (см).

15. Ответ: 4.

Решение. Из точки O последовательно проведем лучи a и b так, что $\angle(ab)$ — прямой, а от луча b отложим прямой $\angle(bc)$. Так как по построению $\angle(ab)$ и $\angle(bc)$ — прямые, значит, эти углы — смежные. Отсюда следует, что луч c дополняет луч a до прямой ac. Аналогично доказывается, что луч d дополняет луч b до прямой bd. Значит, $\angle(bc)$ и $\angle(ad)$ — вертикальные, и по теореме о вертикальных углах они равны. Получили, что четыре луча, проведенные из одной точки образуют четыре угла.

Предположим, что от луча d можно отложить прямой $\angle(df)$ и при этом лучи a и f не будут совпадать. Тогда луч f будет проходить между сторонами угла (ad) и, следовательно, $\angle(ad) = \angle(df) + \angle(fa)$. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что луч a не может проходить между лучами d и f.

Следовательно, для того, чтобы все углы, ограниченные соседними лучами, проведенными из одной точки, были прямыми, достаточно провести четыре луча.