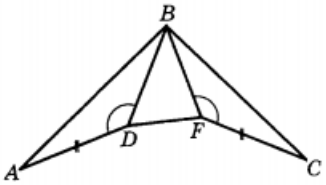
Вариант 1

Часть 1

1. Определите вид треугольника, если одна его сторона равна 5 см, вторая — 3 см, а периметр равен 13 см.

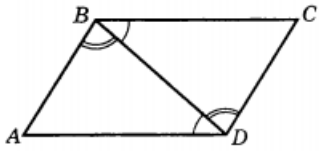
1) Равнобедренный;
2) равносторонний;
3) разносторонний;
4) определить невозможно.

2. Треугольники ABD и CBF равны и $\angle D = \angle F$. Определите вид треугольника DBF, если $AD = FC$.



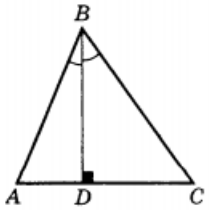
1) Равнобедренный
2) равносторонний;
3) разносторонний;
4) определить невозможно.

3. Определите, в силу какого признака равенства треугольников треугольники BAD и DCB равны, если $\angle CBD = \angle ADB$, $\angle ABD = \angle CDB$.



1) По двум сторонам и углу между ними;
2) по стороне и прилежащим к ней углам;
3) по трем сторонам;
4) треугольники не равны.

4. В треугольнике ABC биссектриса BD является высотой треугольника. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABD равен 14 см, а биссектриса BD равна 3 см.



1) 17 см;
2) 11 см;
3) 34 см;
4) 22 см.

5. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

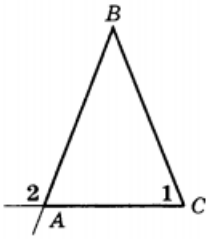
Периметр равнобедренного треугольника равен 18 см. Одна из его сторон равна 6 см. Найдите длины двух других сторон.

1) Одно;
2) два;
3) три;
4) решений нет.

Часть 2

6. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 7 см, а периметр равен 17 см. Найдите боковую сторону AB.

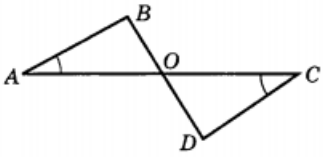
7. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Определите $\angle 2$, если $\angle 1 = 62°$.



8. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB в два раза больше его основания AC, а периметр равен 30 см. Найдите основание AC.

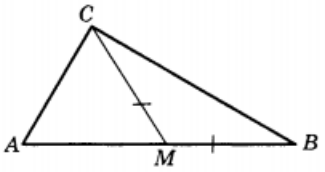
9. В разных полуплоскостях относительно прямой AB отмечены точки C и D так, что $AD = BC$, $\angle DAB = \angle CBA$. Найдите длину отрезка AC, если $AD = 14$ см, $BD = 17$ см.

10. Треугольники BOA и DOC равны, $\angle BAO = \angle DCO$. Определите, во сколько раз отрезок BD больше отрезка OD.



11. В треугольнике ABC: $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см. Треугольники ABC и KML равны, причем $\angle BAC = \angle LKM$ и $\angle ACB = \angle KLM$. Определите длину стороны MK.

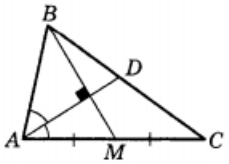
12. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Известно, что $CM = MB$, $\angle CAM = 68°$, $\angle ACB = 90°$. Найдите угол MBC.



Часть 3

13. Докажите признак равенства равнобедренных треугольников: если боковая сторона и основание одного равнобедренного треугольника равны боковой стороне и основанию другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

14. Медиана BM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе AD. Найдите AB, если $AC = 12$ см.



15. Прямая n проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна ему. Докажите, что каждая точка, равноудаленная от точек A и B, лежит на прямой n.

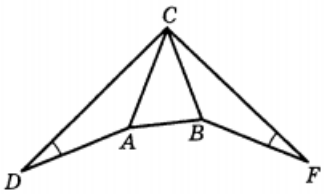
Вариант 2

Часть 1

1. Определите вид треугольника, если одна его сторона равна 5 см, вторая — 3 см, а периметр равен 14 см.

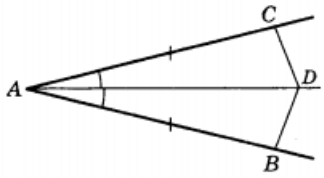
1) Равнобедренный;
2) равносторонний;
3) разносторонний;
4) такой треугольник не существует.

2. Треугольники DCA и FCB равны и $\angle D = \angle F$. Определите вид треугольника ACB.



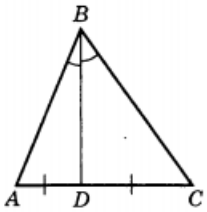
1) Равнобедренный;
2) равносторонний;
3) разносторонний;
4) такой треугольник не существует.

3. Луч AD — биссектриса угла BAC. На сторонах угла отложены равные отрезки AB и AC. Определите, в силу какого признака равенства треугольников треугольники BAD и CAD равны.



1) По двум сторонам и углу между ними;
2) по стороне и прилежащим к ней углам;
3) по трем сторонам;
4) треугольники не равны.

4. В треугольнике ABC медиана BD является биссектрисой треугольника. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABD равен 15 см, а медиана BD равна 6 см.



1) 9 см;
2) 18 см;
3) 21 см;
4) 42 см.

5. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

В равнобедренном треугольнике стороны равны 8 см и 5 см. Найдите периметр треугольника.

1) Одно; 2) два; 3) три; 4) решений нет.

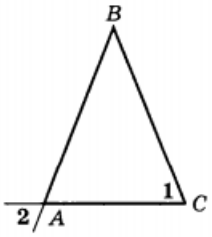
Часть 2

6. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 7 см, а периметр равен 17 см. Найдите основание AC.

_____

7. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Определите $\angle 2$, если $\angle 1 = 56°$.

_____



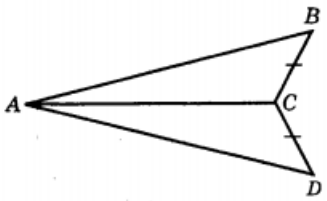
8. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC на 3 см больше его боковой стороны AB, а периметр равен 24 см. Найдите боковую сторону AB.

9. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что O — середина AB и $\angle OAC = \angle OBD$. Найдите угол ACO, если $\angle ODB = 63°$, $\angle OBD = 43°$.

_____

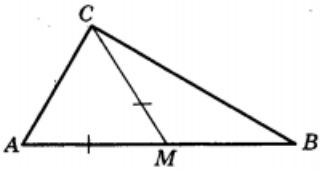
10. Треугольники ABC и DAC равны, причем $BC = CD$. Определите, во сколько раз угол BAD больше угла BAC.

_____



11. В треугольнике ABC: $\angle BCA = 50°$, $\angle BAC = 100°$, $\angle ABC = 30°$. Треугольники ABC и KML равны, причем $BA = KM$, $AC = KL$. Определите угол MKL.

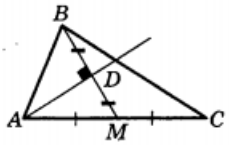
12. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Известно, что $CM = AM$, $\angle MAC = 53°$, $\angle MBC = 37°$. Найдите угол ACB.



Часть 3

13. Докажите признак равенства равнобедренных треугольников: если боковая сторона и угол при вершине, противолежащей основанию, одного равнобедренного треугольника равны боковой стороне и углу при вершине, противолежащему основанию, другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

14. Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит ее пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 4 см.



15. Прямая n проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна ему. Докажите, что каждая точка прямой n равноудалена от точек A и B.

Ответы и решения.

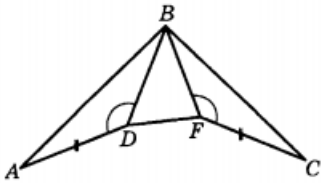
Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 1.

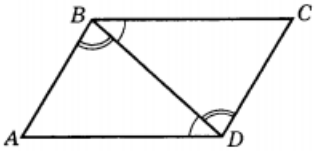
Решение. Пусть стороны треугольника $a = 5$ см, $b = 3$ см и c — неизвестная сторона. Периметр треугольника равен сумме всех его сторон, $P = a + b + c$; $c = P - (a + b) = 13 - (5 + 3) = 5$ (см). У данного треугольника две стороны равны, следовательно, треугольник — равнобедренный.

2. Ответ: 1.



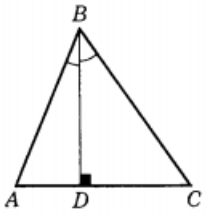
Решение. По условию треугольники ABD и CBF равны, $\angle D = \angle F$ и $AD = FC$. В равных треугольниках против равных углов $\angle D = \angle F$ лежат равные стороны $AB = BC$. Значит, в треугольниках ABD и CBF стороны BD и BF тоже равны. Таким образом, в треугольнике DBF стороны BD и BF равны. Следовательно, треугольник DBF — равнобедренный.

3. Ответ: 2.



Решение. В треугольниках BAD и DCB: $\angle CBD = \angle ADB$, $\angle ABD = \angle CDB$ и сторона BD — общая. Следовательно, треугольники BAD и DCB равны по стороне и прилежащим к ней углам.

4. Ответ: 4.



Решение. Так как в треугольнике ABC биссектриса BD является высотой треугольника, то треугольник — равнобедренный. Значит, $AB = BC$ и BD является медианой треугольника, т. е. $AD = DC$. Периметр треугольника равен сумме всех его сторон, т. е.

$P_{ABD} = AD + AB + BD$,

$P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + BC + AD + DC = 2(AB + AD)$.

$AD + AB = P_{ABD} - BD = 14 - 3 = 11$ (см),

$P_{ABC} = 2(AB + AD) = 22$ (см).

5. Ответ: 1.

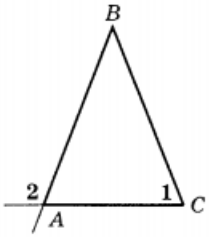
Анализируем условие задачи. Периметр равнобедренного треугольника равен 18 см, а одна сторона равна 6 см, значит, сумма двух других сторон равна 12 см. В равнобедренном треугольнике две стороны равны, значит, если одна из двух неизвестных сторон равна данной, то есть равна 6 см, то третья сторона также равна данной. Если равны друг другу две неизвестные стороны, то каждая из них равна $12 : 2 = 6$ (см), т. е. все стороны равны. Поэтому решение одно.

Часть 2

6. Ответ: 5.

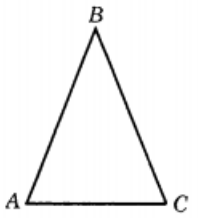
Решение. Периметр треугольника ABC равен сумме всех его сторон, а так как $AB = BC$, то $P = 2AB + AC$; $2AB = P - AC = 17 - 7 = 10$ (см), $AB = 5$ см.

7. Ответ: 118.



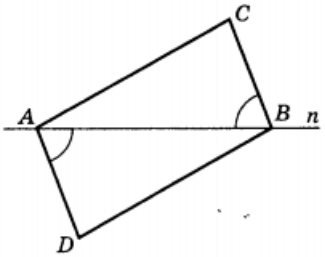
Решение. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, то есть $\angle BAC = \angle 1 = 62°$. Углы BAC и 2 смежные, по теореме о смежных углах $\angle 2 = 180° - \angle BAC = 180° - 62° = 118°$.

8. Ответ: 6.



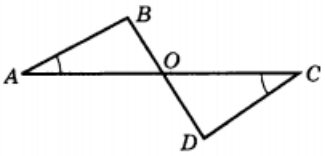
Решение. Периметр треугольника ABC равен сумме всех его сторон, кроме того, $AB = BC$ и $AB = 2AC$. Обозначим длину основания AC буквой x. Отсюда $P_{ABC} = 2x + 2x + x = 5x$; $5x = 30$ (см), $AC = 6$ см.

9. Ответ: 17.



Решение. В треугольниках DAB и CBA по условию $\angle DAB = \angle CBA$, $AD = BC$, сторона AB — общая. Следовательно, треугольники DAB и CBA равны по двум сторонам и углу между ними. В равных треугольниках DAB и CBA против равных углов $\angle DAB$ и $\angle CBA$ лежат равные стороны $AC = BD$. Отсюда $AC = 17$ (см).

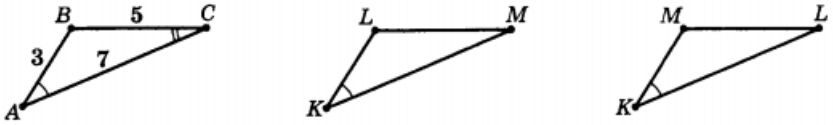
10. Ответ: 2.



Решение. В равных треугольниках по условию $\angle BAO = \angle DCO$. Значит, стороны BO и DO равны, так как в равных треугольниках BOA и DOC против равных углов лежат равные стороны. Из равенства отрезков $BO = DO$ следует, что точка O делит отрезок BD пополам. Отсюда $BD = 2OD$.

11. Ответ: 3.

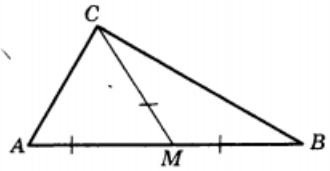
Анализируем условие задачи. Рисунок *а*) выполнен по условию задачи. Условию задачи $\angle BAC = \angle LKM$ соответствуют два варианта расположения вершин L и M (рисунки *б* и *в*). Условие задачи $\angle ACB = \angle KLM$ позволяет найти соответствие между равными элементами равных треугольников ABC и KML.



а) *б*) *в*)

Решение. В равных треугольниках ABC и KML против равных углов $\angle ACB = \angle KLM$ лежат равные стороны $AB = KM = 3$ см.

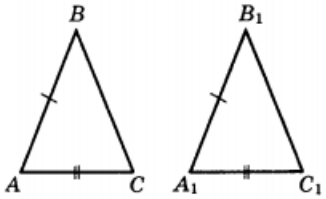
12. Ответ: 22.



Решение. Так как отрезок CM — медиана треугольника ABC, значит, $AM = MB$. По условию задачи $CM = MB$, следовательно, $AM = CM$. Отсюда треугольник CAM — равнобедренный и $\angle MAC = \angle ACM = 68°$. Так как отрезок CM — медиана треугольника ABC, то луч CM проходит между сторонами угла ACB: $\angle ACB = \angle ACM + \angle MCB$, $\angle MCB = \angle ACB - \angle ACM = 90° - 68° = 22°$. По условию задачи $CM = MB$, следовательно, треугольник MCB равнобедренный. Значит, $\angle MCB = \angle CBM = 22°$.

Часть 3

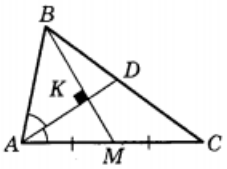
13. Решение. Так как по условию треугольник ABC — равнобедренный, то $AB = BC$; так как по условию треугольник $A_1B_1C_1$ — равнобедренный, то $A_1B_1 = B_1C_1$. Так как по условию $AB = A_1B_1$, то $BC = B_1C_1$.



Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$ по условию; $BC = B_1C_1$ по доказанному выше.

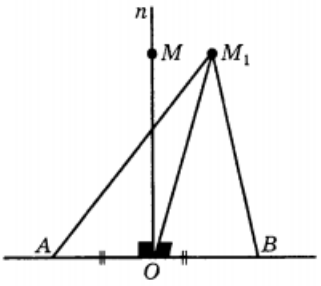
Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

14. Ответ: 6.



Решение. Пусть K — точка пересечения AD и BM. Из условия задачи следует, что AK — высота и биссектриса треугольника ABM. Следовательно, треугольник ABM — равнобедренный ($AB = AM$). Значит, $AB = 6$ см.

15. Решение. Допустим, что точка M_1 равноудалена от точек A и B ($M_1A = M_1B$) и не лежит на прямой n. Тогда треугольник AM_1B — равнобедренный с основанием AB. Соединим точку M_1 с серединой отрезка AB — точкой O, т. е. проведем M_1O. В равнобедренном треугольнике AM_1B медиана M_1O, проведенная к основанию AB, является высотой. По условию прямая n проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна ему. Получили противоречие: через середину отрезка — AB точку O — проходят два перпендикуляра к прямой AB. Следовательно, точка M_1 лежит на прямой n.



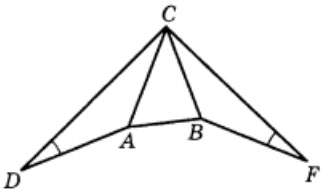
Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 3.

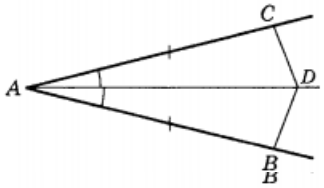
Решение. Пусть стороны треугольника $a = 5$ см, $b = 3$ см и c — неизвестная сторона. Периметр треугольника равен сумме всех его сторон, $P = a + b + c$; $c = P - (a + b) = 14 - (5 + 3) = 6$ (см). У данного треугольника все стороны имеют разную длину, следовательно, треугольник — разносторонний.

2. Ответ: 1.



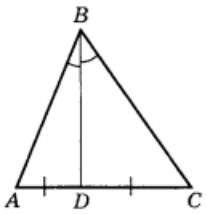
Решение. По условию треугольники ACD и CBF равны, $\angle D = \angle F$. В равных треугольниках против равных углов $\angle D = \angle F$ лежат равные стороны $AC = BC$. Следовательно, треугольник ACB — равнобедренный.

3. Ответ: 1.



Решение. В треугольниках BAD и CAD: по условию $\angle BAD = \angle CAD$ и $AB = AC$, сторона AD — общая. Следовательно, треугольники BAD и DCB равны по двум сторонам и углу между ними.

4. Ответ: 2.



Решение. Так как в треугольнике ABC медиана BD является биссектрисой треугольника, то треугольник — равнобедренный. Значит, $AB = BC$, и поскольку BD является медианой треугольника, то $AD = DC$. Периметр треугольника равен сумме всех его сторон, то есть $P_{ABD} = AD + AB + BD$, $P_{ABC} = BC + BC + AC = AB + BC + AD + DC = 2(AB + AD)$.

$AD + AB = P_{ABD} - BD = 15 - 6 = 9$ (см),

$P_{ABC} = 2(AB + AD) = 18$ см.

5. Ответ: 2.

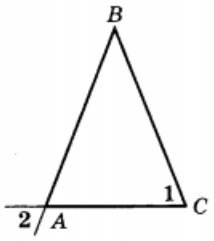
Анализируем условие задачи. В равнобедренном треугольнике две стороны равны, значит, неизвестная сторона может быть равна 8 см или 5 см. Поэтому решений два.

Часть 2

6. Ответ: 3.

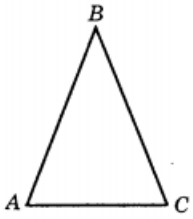
Решение. Периметр треугольника ABC равен сумме всех его сторон, а так как $AB = BC$, то $P = 2AB + AC$; $AC = P - 2AB = 17 - 14 = 3$ (см), $AC = 3$ см.

7. Ответ: 56.



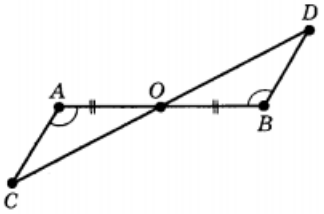
Решение. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $\angle BAC = \angle BCA$ (углы при основании), $\angle BAC = \angle 2$ (вертикальные), следовательно, $\angle 2 = 56°$.

8. Ответ: 9.



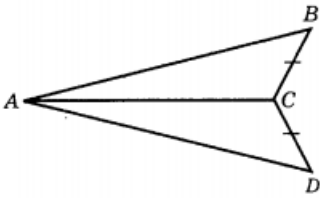
Решение. Периметр треугольника ABC равен сумме всех его сторон, кроме того, $AB = BC$ и $AC = AB + 3$. Обозначим боковую сторону AB буквой x. Отсюда $P_{ABC} = x + x + (x + 3) = 3x + 3$, $3x = 30 - 3 = 27$ (см), $x = 9$ (см), $AB = 9$ см.

9. Ответ: 63.



Решение. В треугольниках AOC и BOD по условию $\angle CAO = \angle DBO$ и $AO = BO$, $\angle AOC = \angle BOD$, как вертикальные. Следовательно, треугольники DOB и COA равны по стороне и прилежащим к ней углам. В равных треугольниках AOC и BOD углы $\angle ACO$ и $\angle BDO$ равны. Отсюда $\angle ACO = 63°$.

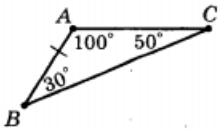
10. Ответ: 2.

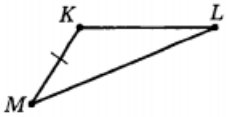


Решение. В равных треугольниках ABC и DAC по условию стороны BC и CD равны. Значит, углы BAC и DAC равны, так как в равных треугольниках ABC и DAC против равных сторон лежат равные углы. Из равенства углов BAC и DAC следует, что луч AC делит угол BAD пополам. Отсюда $\angle BAD = 2\angle BAC$.

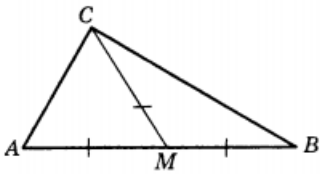
11. Ответ: 100.

Решение. В равных треугольниках ABC и KML против равных сторон $BC = LM$ лежат равные углы $\angle CAB = \angle MKL = 50°$, а против равных сторон $AC = KL$ лежат равные углы $\angle ABC = \angle KML = 30°$. Значит, угол MKL находится против стороны ML, $\angle MKL = \angle BAC = 100°$.





12. Ответ: 90.

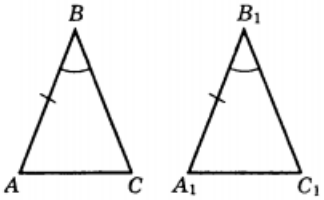


Решение. Так как отрезок CM — медиана треугольника ABC, значит, $AM = MB$. По условию задачи $AM = CM$, следовательно, $CM = MB$. Значит, треугольники CAM и CBM — равнобедренные. Из треугольника CAM: $\angle MAC = \angle ACM = 53°$, а из треугольника CBM: $\angle MCB = \angle MBC = 37°$. Так как отрезок CM — медиана треугольника ABC, то луч CM проходит между сторонами угла ACB: $\angle ACB = \angle ACM + \angle MCB = 53° + 37° = 90°$.

Часть 3

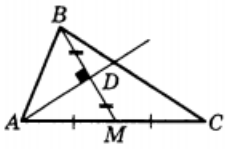
13. Решение. Так как по условию треугольник ABC — равнобедренный, то $AB = BC$; так как по условию треугольник $A_1B_1C_1$ — равнобедренный, то $A_1B_1 = B_1C_1$. Так как по условию $AB = A_1B_1$, то $BC = B_1C_1$.

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$ по условию; $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ по условию; $BC = B_1C_1$ по доказанному выше. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.



14. Ответ: 8 см.

Решение. Из условия задачи: прямая, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит ее пополам, следует, что треугольник ABM — равнобедренный, $AB = AM = 4$ см. Следовательно, $AC = 8$ см.



15. Решение. По условию прямая n проходит через середину отрезка AB точку O ($AO = OB$) и перпендикулярна ему. Пусть точка M лежит на прямой n. Рассмотрим треугольники AMO и BMO. Так как прямая n перпендикулярна AB, то треугольники AMO и BMO прямоугольные, при этом $AO = OB$, MO — общая. Значит, прямоугольные треугольники AMO и BMO равны по двум катетам. Значит, у этих треугольников равны и гипотенузы, то есть $AM = BM$.