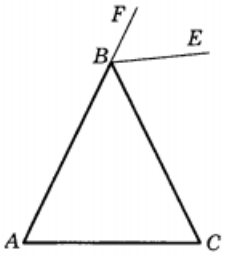
Вариант 1

Часть 1

1. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов равна третьему углу.

1) Остроугольный;
2) прямоугольный;
3) тупоугольный;
4) определить не возможно.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BE внешнего угла при вершине B. Определите взаимное расположение прямых BE и AC.



1) Перпендикулярны;
2) пересекаются, но не перпендикулярны;
3) параллельны;
4) определить не возможно.

3. Углы треугольника относятся, как 5 : 2 : 5. Определите вид данного треугольника.

1) Остроугольный;
2) прямоугольный;
3) тупоугольный;
4) определить не возможно.

4. Известно, что только два угла треугольника таковы, что каждый из них в два раза меньше внешнего угла, не смежного с ним. Определите вид треугольника.

1) Разносторонний;
2) равносторонний;
3) равнобедренный;
4) определить не возможно.

5. В треугольнике ABC внешний и внутренний углы при вершине C равны. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.

1) AB; 2) BC; 3) AC; 4) определить невозможно.

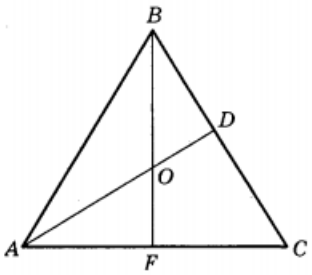
Часть 2

6. В треугольнике ABC угол B равен 48°, а внешний угол при вершине A равен 100°. Найдите угол BCA.

_____

7. В равностороннем треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BF, которые пересекаются в точке O. Найдите угол AOF.

_____



8. В треугольнике ABC внешний угол при вершине A на 64° больше внешнего угла при вершине B. Найдите угол B, если угол C равен 80°.

_____

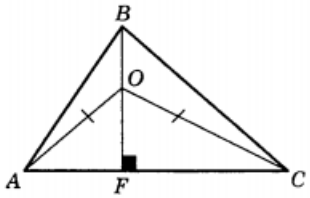
9. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол C треугольника ABC, если $\angle AOB = 140°$.

_____

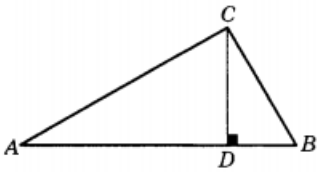
10. Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см. Одна из его сторон равна 6 см. Найдите длину боковой стороны.

_____

11. В треугольнике ABC на высоте BF отмечена точка O такая, что $AO = OC$. Расстояние от точки O до стороны AB равно 4 см, а до стороны AC — 7 см. Найдите расстояние от точки O до стороны BC.

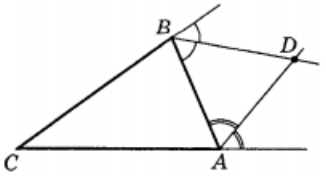


12. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. Найдите гипотенузу AB, если $BC = 6$ см, $BD = 3$ см.



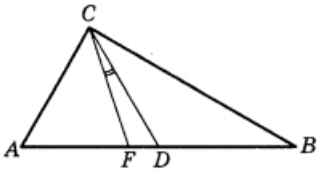
Часть 3

13. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах B и A пересекаются в точке D. Найдите $\angle BCA$, если $\angle BDA = 70°$.



14. В треугольнике ABC высота, проведенная из вершины B, пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AB < CB$, если угол CBD больше угла ABD.

15. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведены медиана CD и биссектриса CF. Найдите угол DCF, если $\angle ABC = 35°$.



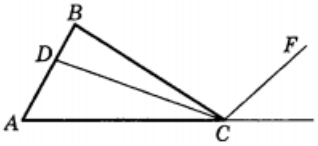
Вариант 2

Часть 1

1. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов меньше третьего угла.

1) Остроугольный;
2) прямоугольный;
3) тупоугольный;
4) определить не возможно.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы CF и CD внешнего и внутреннего углов при вершине C. Определите взаимное расположение прямых CF и CD.



1) Перпендикулярны;
2) пересекаются, но не перпендикулярны;
3) параллельны;
4) определить не возможно.

3. Углы треугольника относятся, как 1 : 1 : 7. Определите вид данного треугольника.

1) Остроугольный;
2) прямоугольный;
3) тупоугольный;
4) определить не возможно.

4. Известно, что каждый угол треугольника в два раза меньше любого внешнего угла. Определите вид треугольника.

1) Разносторонний;
2) равносторонний;
3) равнобедренный;
4) определить невозможно.

5. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и B равны, а внешний угол при вершине C равен его внутреннему углу. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.

1) AB; 2) BC; 3) AC; 4) определить невозможно.

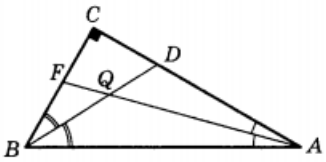
Часть 2

6. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и B соответственно равны 150° и 120°. Найдите угол C треугольника.

_____

7. Найдите угол AQB между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника ABC.

_____



8. В треугольнике ABC угол A в три раза меньше внешнего угла при вершине B. Найдите угол A, если угол C равен 48°.

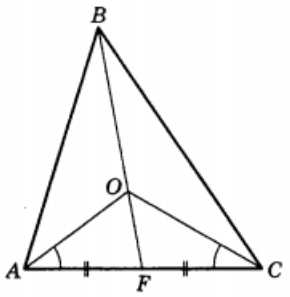
_____

9. Биссектрисы AD и BF треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол AOF треугольника, если $\angle C = 50°$.

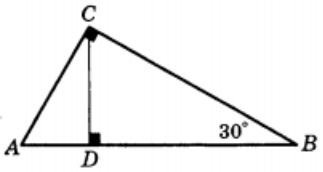
_____

10. В равнобедренном треугольнике один из углов тупой, одна из сторон имеет длину 15 см, а другая — 10 см. Определите длину основания этого треугольника.

11. В треугольнике ABC на медиане BF отмечена точка O такая, что $\angle CAO = \angle OCA$. Расстояние от точки O до стороны AB равно 8 см, а до стороны AC — 5 см. Найдите расстояние от точки O до стороны BC.

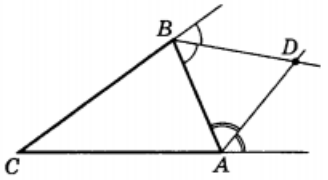


12. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. Найдите отрезок AD, если угол CBA равен 30°, а гипотенуза AB равна 8 см.



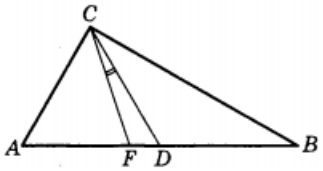
Часть 3

13. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах B и A пересекаются в точке D. Найдите $\angle BDA$, если $\angle BCA = 40°$.



14. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AC > CB$.

15. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведены медиана CD. На отрезке AD отмечена точка F такая, что $\angle DCF = 10°$. Докажите, что отрезок CF является биссектрисой угла ACB, если $\angle ABC = 35°$.



Ответы и решения.

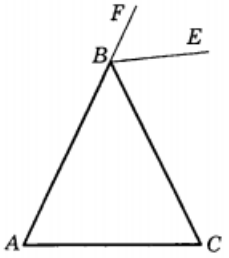
Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 2.

Решение. Пусть углы треугольника α, β и γ. По теореме о сумме углов треугольника $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. По условию задачи $\alpha + \beta = \gamma$, значит, $2\gamma = 180°$, $\gamma = 90°$. Следовательно, данный треугольник — прямоугольный.

2. Ответ: 3.



Решение. По теореме о внешнем угле треугольника внешний угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен сумме двух углов при основании $\angle FBC = \angle BAC + \angle BCA$.

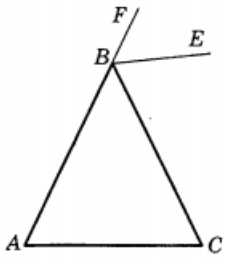
По свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle FBC = \angle BAC + \angle BCA = 2\angle BCA$. Биссектриса BE внешнего угла при вершине B делит угол FBC пополам, значит, $\angle FBC = 2\angle CBE$. Следовательно, $\angle CBE = \angle BCA$.

$\angle CBE = \angle BCA$ накрест лежащие углы при прямых AC и BE и секущей BC, значит, BE и AC параллельны.

3. Ответ: 1.

Решение. Пусть углы треугольника $\alpha = 5x$, $\beta = 2x$ и $\gamma = 5x$. По теореме о сумме углов треугольника $\alpha + \beta + \gamma = 5x + 2x + 5x = 180°$, $x = 15°$, $\alpha = 75°$, $\beta = 30°$ и $\gamma = 75°$. Значит, в треугольнике все углы острые. Следовательно, данный треугольник — остроугольный.

4. Ответ: 3.



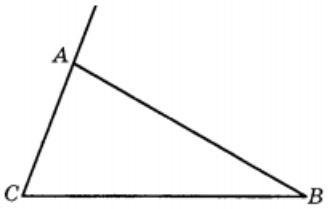
Решение. По теореме о внешнем угле треугольника внешний угол при вершине B равен сумме двух углов при основании $\angle FBC = \angle BAC + \angle BCA$. Таким образом $\angle FBC = 2\angle BCA$ и $\angle FBC = 2\angle BAC$. Отсюда $\angle BCA = \angle BAC$, значит, в данном треугольнике равны два угла и, следовательно, треугольник — равнобедренный.

5. Ответ: 1.

Решение. Внешний и внутренний углы при одной вершине являются смежными углами и по теореме о смежных углах треугольника в сумме равны 180°. По условию задачи внешний и внутренний углы при вершине C треугольника ABC равны. Значит, внутренний угол при вершине C равен 90°. Следовательно, данный треугольник — прямоугольный, а в прямоугольном треугольнике наибольшей стороной является гипотенуза треугольника, т. е. сторона AB.

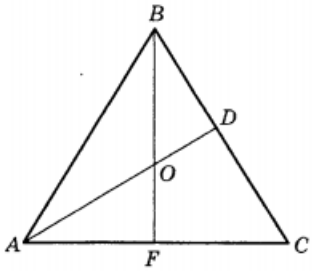
Часть 2

6. Ответ: 52.



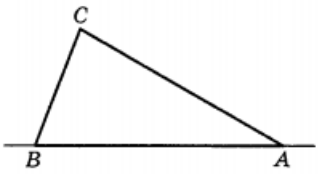
Решение. По теореме о внешнем угле треугольника внешний угол при вершине A равен сумме двух углов при основании $\angle BAC = \angle ACB + \angle ABC = 100°$. Отсюда $\angle ACB = 100° - \angle ABC = 100° - 48° = 52°$.

7. Ответ: 60.



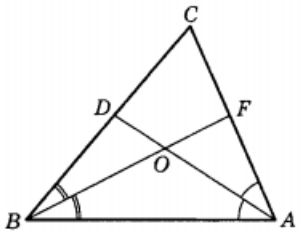
Решение. Рассмотрим треугольник AOF. По свойству биссектрисы равнобедренного треугольника биссектриса BF треугольника ABC является его высотой, значит, треугольник AOF — прямоугольный. $\angle OAF = 30°$, так как AD — биссектриса треугольника ABC. По теореме о сумме углов треугольника $\angle OAF + \angle AOF + \angle AFO = 180°$, $\angle AOF = 180° - (\angle OAF + \angle AFO) = 180° - (30° + 90°) = 60°$.

8. Ответ: 18.



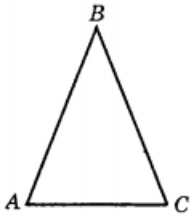
Решение. Так как внешний угол при вершине A треугольника ABC на 64° больше внешнего угла при вершине B, следовательно, угол при вершине A треугольника ABC на 64° меньше угла при вершине B. Обозначим угол BAC буквой x. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = (x + 64°) + 80° + x = 2x + 144° = 180°$. Отсюда $2x = 36°$, $x = 18°$, следовательно, $\angle ABC = 18°$.

9. Ответ: 100.



Решение. В треугольнике ABC $\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180°$ по теореме о сумме углов треугольника. Отсюда $\angle BCA = 180° - (\angle ABC + \angle ACB)$. Из треугольника BOA получим, что $\angle OBA + \angle OAB = 180° - 140° = 40°$. Тогда $\angle ABC + \angle CAB = 80°$; $\angle BCA = 100°$.

10. Ответ: 9.

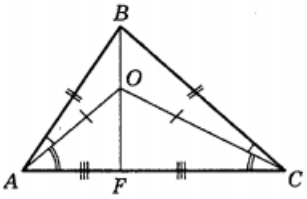


Решение. Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см, а одна сторона равна 6 см, значит, сумма двух других сторон равна 18 см. Рассмотрим два случая.

1. Если одна из двух неизвестных сторон равна данной, т. е. боковая сторона равна 6 см, то третья сторона равна 12 см. А, значит, сумма двух сторон равна третьей. Пришли к противоречию с теоремой о неравенстве треугольника.

2. Если равны друг другу две неизвестные стороны, то каждая из них равна 9 см и они являются боковыми сторонами. В этом случае выполняется неравенство треугольника.

11. Ответ: 4.

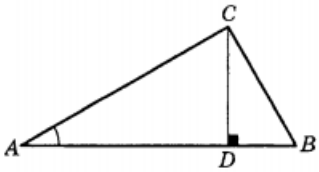


Решение. Треугольник AOC — равнобедренный, так как по условию $AO = OC$. Отрезок OF является высотой треугольника AOC, так как точка O лежит на высоте BF треугольника ABC. Высота в равнобедренном треугольнике является медианой, значит, $AF = FC$. Отсюда высота BF треугольника ABC является и его медианой, значит, треугольник ABC — равнобедренный, т. е. $AB = CB$. В равнобедренном треугольнике высота является и биссектрисой, поэтому $\angle ABF = \angle CBF$.

В треугольниках ABO и CBO: стороны AB и CB равны как стороны равнобедренного треугольника, углы ABF и CBF равны по доказанному выше, сторона BO — общая. Следовательно, треугольники ABO и CBO равны по двум сторонам и углу между ними.

Расстояние от точки до прямой — перпендикуляр, опущенный из этой точки на прямую, а перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую CB, является высотой треугольника BCO. Аналогично, расстояние от точки O до прямой AB — высота треугольника BAO. Так как треугольники ABO и CBO равны, то и их высоты равны. Следовательно, расстояние от точки O до стороны BC равно 4 см.

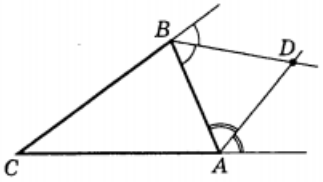
12. Ответ: 12.



Решение. Так как отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC, то треугольник CDB — прямоугольный. В прямоугольном треугольнике CDB гипотенуза $BC = 6$ см, а катет $BD = 3$ см, отсюда $\angle DCB = 30°$, а $\angle CBD = 60°$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике ABC $\angle CAD = 30°$, а катет $BC = 6$ см, отсюда гипотенуза $AB = 12$ см.

Часть 3

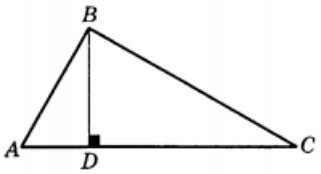
13. Ответ: 40°.



Решение. В треугольнике ABD по теореме о сумме углов треугольника: $\angle ABD + \angle BAD + \angle BDA = 180°$, откуда $\angle ABD + \angle BAD = 180° - 70° = 110°$. Так как лучи AD и BD — биссектрисы внешних углов при вершинах B и A треугольника ABC, то сумма внешних углов треугольника ABC равна 220°. Так как внутренний и внешний углы при одной вершине — смежные и равны 180°, то сумма углов ABC и BAC треугольника ABC равна 140°. Следовательно, $\angle ACB = 180° - (\angle ABC + \angle BAC) = 40°$.

14. Решение. Треугольники ABD и CBD прямоугольные, так как отрезок BD — высота. В этих треугольниках $\angle CBD > \angle ABD$, значит, в силу теоремы о сумме углов треугольника $\angle BAD > \angle BCD$.

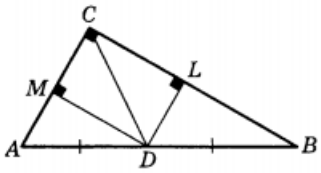
В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, для треугольника ABC $\angle BAD > \angle BCD$, значит $CB > AB$.



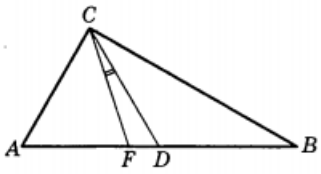
15. Ответ: 10°.

Решение. Сначала надо доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы.

Пусть CD — медиана прямоугольного треугольника ACB, проведенная к гипотенузе AB (рис. *а*). Проведем из точки D перпендикуляры DL и DM к катетам CB и AC соответственно. Треугольники AMD и DLB равны по гипотенузе $AD = DB$ и острому углу $\angle MDA = \angle LBD$ (соответственные при параллельных прямых MD и CB и секущей AB). Отсюда $AM = DL$. Треугольники DMC и CLD равны по гипотенузе CD (общая сторона) и острому углу $\angle MDC = \angle DCL$ (накрест лежащие при параллельных прямых MD и CB и секущей CD). Отсюда $DL = MC$. Следовательно, $AM = MC$. Треугольник ADC — равнобедренный, $CD = AD = BD$. В треугольнике CDB $CD = BD$, следовательно, треугольник CDB — равнобедренный и, значит, $\angle DCB = \angle DBC = 35°$. Так как CF — биссектриса прямого угла, то $\angle ACF = 45°$; $\angle DCF = \angle DCB - (\angle ACF + \angle DCB) = 90° - (45° + 35°) = 10°$.



а)



б)

Вариант 2

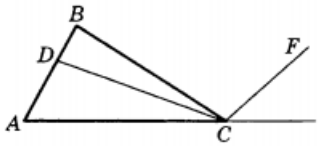
Часть 1

1. Ответ: 3.

Решение. Пусть углы треугольник α, β и γ. По теореме о сумме углов треугольника $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. По условию задачи $\alpha + \beta < \gamma$, значит $2\gamma > 180°$, $\gamma > 90°$. Следовательно, данный треугольник — тупоугольный.

2. Ответ: 1.

Решение. Внешний и внутренний углы треугольника при одной вершине являются смежными углами и в сумме равны 180°. Значит, угол между биссектрисами CF и CD внешнего и внутреннего углов при вершине C равен 90°. Значит, прямые CF и CD перпендикулярны.

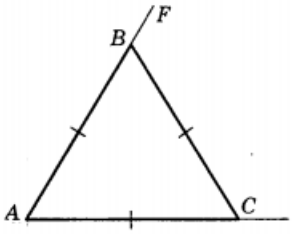


3. Ответ: 3.

Решение. Пусть углы треугольника $\alpha = x$, $\beta = x$ и $\gamma = 7x$. По теореме о сумме углов треугольника $\alpha + \beta + \gamma = x + x + 7x = 180°$, $x = 20°$, $\alpha = 20°$, $\beta = 20°$ и $\gamma = 140°$. Значит, в треугольнике один угол — тупой. Следовательно, данный треугольник — тупоугольный.

4. Ответ: 2.

Решение. По теореме о внешнем угле треугольника внешний угол при вершине B равен сумме двух углов, не смежных с ним. $\angle FBC = \angle BAC + \angle BCA$, причем $\angle FBC = 2\angle BCA$ и $\angle FBC = 2\angle BAC$. Отсюда $\angle BCA = \angle BAC$, значит, в данном треугольнике равны два угла. Аналогично доказывается, что $\angle BCA = \angle ABC$. Следовательно, треугольник — равносторонний.

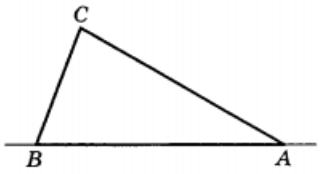


5. Ответ: 1.

Решение. Внешний и внутренний углы при одной вершине являются смежными углами и по теореме о смежных углах треугольника в сумме равны 180°. По условию задачи внешний и внутренний углы при вершине C равны. Значит, внутренний угол при вершине C треугольника равен 90°. Следовательно, данный треугольник — прямоугольный, а в прямоугольном треугольнике наибольшей стороной является гипотенуза треугольника, т. е. сторона AB.

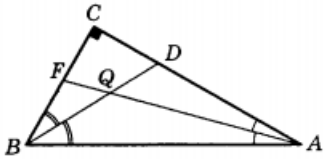
Часть 2

6. Ответ: 90.



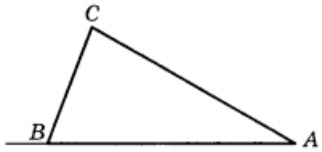
Решение. Так как внешние углы при вершинах A и B соответственно равны 150° и 120°, то внутренние углы при вершинах A и B соответственно равны 30° и 60°. По теореме о сумме двух углов при основании $\angle ACB = 180° - (\angle CAB + \angle ABC) = 180° - (30° + 60°) = 90°$, $\angle ACB = 90°$.

7. Ответ: 135.



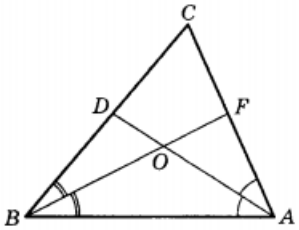
Решение. Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Рассмотрим треугольник AQB. $\angle QAB + \angle ABQ = \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle BAC) = 45°$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle AQB + (\angle CBA + \angle BAC) = 180°$, $\angle AQB = 180° - (\angle CBA + \angle BAC) = 180° - 45° = 135°$.

8. Ответ: 24.



Решение. Обозначим угол BAC буквой x. Так как угол при вершине A треугольника ABC в три раза меньше внешнего угла при вершине B, то угол при вершине B равен $180° - 3x$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = (180° - 3x) + 48° + x = 228° - 2x = 180°$. Отсюда $2x = 48°$, $x = 24°$, следовательно, $\angle BAC = 24°$.

9. Ответ: 115.

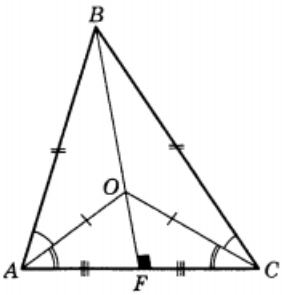


Решение. В треугольнике ABC $\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180°$ по теореме о сумме углов треугольника. Отсюда $\angle ABC + \angle CAB = 180° - \angle BCA = 180° - 50° = 130°$. Рассмотрим треугольник AOB; $\angle OAB + \angle ABO = (\angle CBA + \angle BAC) = 65°$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle AOB = 180° - (\angle CBA + \angle BAC) = 180° - 65° = 115°$.

10. Ответ: 15.

Решение. В равнобедренном треугольнике только один угол может быть тупым, значит, он является наибольшим в треугольнике. Поэтому против него лежит большая сторона и она является основанием. Следовательно, основание равно 15 см.

11. Ответ: 8.

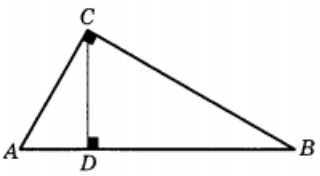


Решение. Треугольник AOC — равнобедренный, так как по условию $\angle CAO = \angle OCA$. Отрезок OF является медианой треугольника AOC, так как точка O лежит на медиане BF треугольника ABC. Медиана в равнобедренном треугольнике является высотой, значит, $BF \perp AC$. Поскольку медиана BF треугольника ABC является и его высотой, значит, треугольник ABC — равнобедренный, т.е. $AB = CB$. В равнобедренном треугольнике медиана является и его биссектрисой, поэтому $\angle ABF = \angle CBF$.

В треугольниках ABO и CBO стороны AB и CB равны, как стороны равнобедренного треугольника, углы ABF и CBF равны по доказанному выше, сторона BO — общая. Следовательно, треугольники ABO и CBO равны по двум сторонам и углу между ними.

Расстояние от точки до прямой — это перпендикуляр, опущенный из этой точки на прямую, а перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую CB, является высотой треугольника BCO. Аналогично, расстояние от точки O до прямой AB — высотой треугольника BAO. Так как треугольники ABO и CBO равны, то и их высоты равны. Следовательно, расстояние от точки O до стороны BC равно 8 см.

12. Ответ: 2.



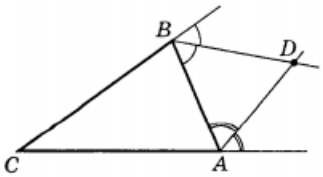
Решение. В треугольнике ABC: $\angle ABC = 30°$, а гипотенуза AB равна 8 см. Значит, по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен 30°, противолежащий ему катет AC равен 4 см.

Так как отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC, то треугольник CDB — прямоугольный. У треугольников ACD и ABC угол BAC — общий. По теореме о сумме углов треугольника $\angle CAB + \angle ACB + \angle CBA = 180°$, отсюда $\angle CAD = 180° - (\angle ACD + \angle BDA) = 60°$. Значит, угол ACD в треугольнике ACD равен 30°.

В прямоугольном треугольнике CDA гипотенуза $AC = 4$ см, а $\angle DCA = 30°$. Следовательно, катет $AD = 2$ см.

Часть 3

13. Ответ: 70°.

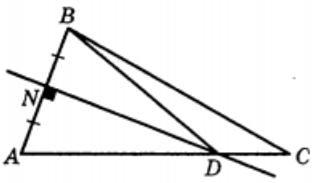


Решение. По теореме о сумме углов треугольника ABC: $\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180°$ откуда $\angle ABC + \angle BAC = 180° - \angle ACB = 180° - 40° = 140°$.

Так как внутренний и внешний углы при одной вершине — смежные и равны 180°, то сумма внешних углов при вершинах B и A треугольника ABC равна 220°.

Так как лучи AD и BD — биссектрисы внешних углов при вершинах B и A треугольника ABC, то $\angle ABD + \angle BAD = 110°$. Следовательно, из треугольника ABD $\angle BDA = 180° - (\angle ABD + \angle BAD) = 180° - 110° = 70°$.

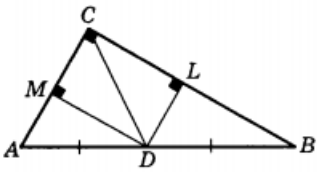
14. Решение. Соединим точку D с вершиной B. В треугольнике ADB отрезок DN является высотой и медианой, так как прямая DN — серединный перпендикуляр к стороне AB. Значит, по свойству углов равнобедренного треугольника $\angle BAD = \angle ABD$.



Луч BD проходит внутри угла ABC, так как он пересекает сторону AC треугольника ABC, значит, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ или, в силу равенства углов при основании равнобедренного треугольника $\angle ABC = \angle BAD + \angle DBC$, следовательно, $\angle ABC > \angle CAB$.

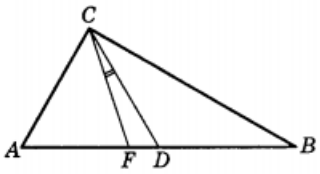
В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, для треугольника ABC $\angle ABC > \angle CAB$, значит, $AC > CB$.

15. Решение. Сначала надо доказать, что *в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы.*



а)

Пусть CD — медиана прямоугольного треугольника ACB, проведенная к гипотенузе AB (рис. *а*). Проведем из точки D перпендикуляры DL и DM к катетам CB и AC соответственно. Треугольники AMD и DLB равны по гипотенузе $AD = DB$ и острому углу $\angle MDA = \angle LBD$ (соответственные при параллельных прямых MD и CB и секущей AB). Отсюда $AM = DL$. Треугольники DMC и CLD равны по гипотенузе CD (общая сторона) и острому углу $\angle MDC = \angle DCL$ (накрест лежащие при параллельных прямых MD и CB и секущей CD). Отсюда $DL = MC$. Следовательно, $AM = MC$. Треугольник ADC — равнобедренный, $CD = AD = BD$.



б)

В треугольнике CDB (рис. *б*) $CD = BD$, следовательно, треугольник CDB — равнобедренный и, значит, $\angle DCB = \angle DBC = 35°$. Луч BD проходит внутри угла FCB, так как он пересекает отрезок FB в точке D, значит $\angle FCB = \angle FCD + \angle DCB = 10° + 35° = 45°$.

Так как $\angle ACB = 90°$, а $\angle FCB = 45°$ и CF проходит внутри угла ACB по условию, значит, CF — биссектриса прямого угла ACB.