Вариант 1

Часть 1

1. Упростите выражение: $b \cdot \sin 45° + b \cdot \cos 135° + b \cdot \sin 180°$.

1. 0; 2. b; 3. $b\sqrt{2}$; 4. $b(\sqrt{2}+1)$.

2. Соседние стороны параллелограмма равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

1. $44\sqrt{3}$; 2. 22; 3. 44; 4. $22\sqrt{3}$.

3. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Определите, какая из его сторон AB или BC больше, если $\angle BMA = 80°$.

1. $AB = BC$;
2. $BC < AB$;
3. $BC > AB$;
4. определить невозможно.

4. Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны 8 см, 14 см и 12 см.

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. такой треугольник не существует.

5. Найдите координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - \frac{1}{7}\bar{b}$, если $\bar{a}$ (−1; 2) и $\bar{b}$ (14; 7).

1. (0; 3); 2. (−4; 3); 3. (−5; 5); 4. (−4; 5).

Часть 2

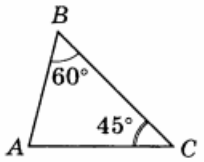
6. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют длину 8 см и образуют угол в 135°. Найдите длину третьей стороны.

_____

7. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма, если его большая сторона равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, а диагонали равны $\sqrt{3}$ см и 1 см.

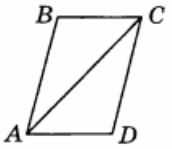
_____

8. В треугольнике ABC сторона AC равна 8 см, один из углов, прилежащих к этой стороне, равен 45°, а угол, противолежащий ей, равен 60°. Найдите сторону, противолежащую углу в 45°.



_____

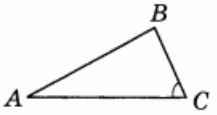
9. Диагональ параллелограмма делит его угол на части, равные 45° и 30°. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к его меньшей стороне.



_____

10. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

"*В треугольнике ABC сторона AB равна 7 см, сторона BC равна 21 см, а угол C равен 33°. Найдите угол BAC*".



_____

11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

_____

12. Определите взаимное расположение ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если справедливо утверждение $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

Часть 3

13. В треугольнике со сторонами 4 см, 5 см и 8 см найдите длину медианы, проведенной из вершины большего угла.

14. В треугольнике ABC угол A больше угла B, а угол B больше угла C. К какой из вершин треугольника ближе всего расположен центр вписанной в него окружности?

15. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Вариант 2

Часть 1

1. Упростите выражение: $b \cdot \sin 120° + b \cdot \cos 150° + b \cdot \sin 90°$.

1. 0; 2. b; 3. $b\sqrt{3}$; 4. $b(\sqrt{3}+1)$.

2. Тупой угол ромба равен $150°$, а его сторона равна 6 см. Найдите площадь ромба.

1. $18\sqrt{3}$; 2. 9; 3. $9\sqrt{3}$; 4. 18.

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Определите, какая из его сторон — BC или CD — меньше, если угол AOB — острый.

1. $CD = BC$;
2. $BC < CD$;
3. $BC > CD$;
4. определить невозможно.

4. Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны 0,3 см, 0,4 см и 0,5 см.

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. такой треугольник не существует.

5. Найдите координаты вектора $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, если $\bar{a}(-2; 1)$; $\bar{b}(1; 0)$.

1. $(2; -0{,}5)$; 2. $(1{,}5; 1)$; 3. $(0; 1)$; 4. $(-1; -0{,}5)$.

Часть 2

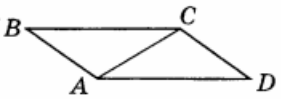
6. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют длину 8 см и образуют угол, равный $135°$. Найдите длину третьей стороны.

_____

7. Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.

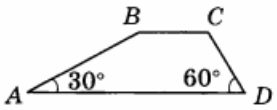
_____

8. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ делит его угол DAB на части BAC и CAD, равные $60°$ и $45°$ соответственно. Найдите большую сторону параллелограмма, если его меньшая сторона равна 4 см.



_____

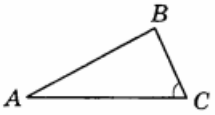
9. Углы при основании AD трапеции равны $60°$ и $30°$. Найдите отношение сторон AB и CD.



_____

10. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

"*В треугольнике ABC сторона AB равна 8 см, сторона BC равна 16 см, а синус угла C равен 0,4. Найдите угол BAC*".



_____

11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в одной из вершин ромба, а их концы находятся в соседних вершинах этого ромба. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

_____

12. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены и $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 1$.

Часть 3

13. Две стороны треугольника имеют длины 6 см и 12 см, а угол между ними равен $120°$. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

14. Две стороны треугольника имеют длины 10 см и 6 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 7 см. Найдите угол между данными сторонами треугольника.

15. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Ответы и решения.

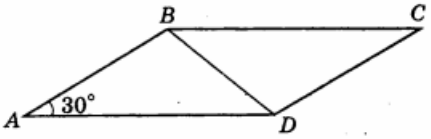
Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 1.

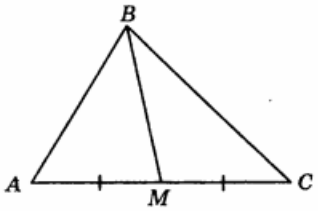
Решение. По определению $\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45°$. Следовательно, $b \cdot \sin 45° + b \cdot \cos 135° + b \cdot \sin 180° = b \cdot \sin 45° + b \cdot (-\cos 45°) + b \cdot \sin 180° = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + b \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b \cdot 0 = b \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

2. Ответ: 3.



Решение. По условию стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен 30°. Отсюда $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 30°$, а $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 30° = 8 \cdot 11 \cdot \frac{1}{2} = 44$ (см^2).

3. Ответ: 3.



Решение. В треугольниках ABM и BMC сторона BM — общая, $AM = MC$ (BM — медиана). Сторона BC лежит против тупого угла, косинус которого отрицателен. Следовательно, из теоремы косинусов получим, что

$BC = \sqrt{BM^2 + MC^2 - 2BM \cdot MC \cdot \cos 100°}$,

$AB = \sqrt{BM^2 + AM^2 - 2BM \cdot AM \cdot \cos 80°}$.

Следовательно, $BC > AB$.

4. Ответ: 1.

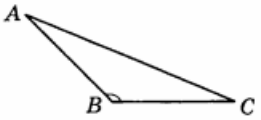
Решение. Вначале проверим, существует ли треугольник с такими сторонами. Стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника $8 + 12 > 14$. Из теоремы косинусов следует, что если сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, тупой, если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, острый. Так как $15^2 + 8^2 > 16^2$, то треугольник — остроугольный.

5. Ответ: 2.

Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ буквами x_1, и x_2, координаты вектора $\bar{a}$ — a_1 и a_2, координаты вектора $\bar{b}$ — b_1 и b_2. Так как $\bar{c} = 2\bar{a} - \frac{1}{7}\bar{b}$, то $x_1 = 2a_1 - \frac{1}{7}b_1 = -2 - 2 = -4$; $x_2 = 2a_2 - \frac{1}{7}b_2 = 4 - 1 = 3$. Таким образом $\bar{c}(-4; 3)$.

Часть 2

6. Ответ: $8\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ см.



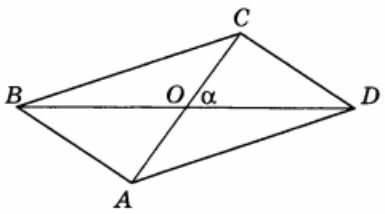
Решение. Так как треугольник ABC — равнобедренный и тупоугольный, то в силу теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника его основание является наибольшей стороной. Обозначим $\angle ABC$ буквой α. В силу теоремы косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha =$
$= AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos(\pi - \alpha)$;

$AC^2 = 64 + 64 + 128 \cdot \cos 45° = 128 + 128 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

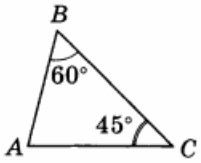
$= 128 + 64\sqrt{2} = 64(2 + \sqrt{2})$, $AC = 8\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (см).

7. Ответ: $30°$.



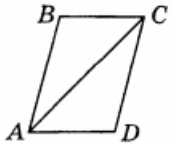
Решение. По условию в параллелограмме $ABCD$ $AD = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $BD = \sqrt{3}$ и $AC = 1$. Диагональ параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим треугольник AOD, стороны которого равны $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и $\frac{1}{2}$ см и удовлетворяют неравенству треугольника. Обозначим $\angle AOD = \alpha$. По теореме косинусов $AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos\alpha$; $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, угол, лежащий против стороны AD, — тупой и равен $150°$. Значит, острый угол между диагоналями параллелограмма равен $30°$.

8. Ответ: $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ см.



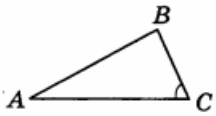
Решение. Для определенности пусть стороной, противолежащей углу в $45°$, будет сторона AB, тогда в треугольнике ABC $\angle ABC = 60°$, $\angle BCA = 45°$ и сторона AC равна 8 см. По теореме синусов $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$; отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 45°}{\sin 60°} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB = AC\sqrt{\frac{2}{3}} = 8\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ (см).

9. Ответ: $\sqrt{2}$.



Решение. Из условия задачи и свойств углов при параллельных прямых следует, что в треугольнике ABC углы, прилежащие к стороне AC, равны $45°$ и $30°$. Из теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника следует, что против угла в $45°$ лежит большая сторона, пусть это будет сторона AB. По теореме синусов $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin 45°}{\sin 30°} = \sqrt{2}$.

10. Ответ: 1.



Решение. По теореме синусов можно найти синус угла BAC. Так как $BC < AB$, то $\angle BAC$ — острый, т.е. угол B, а значит, и стороны AC, определяются однозначно.

11. Ответ: $90°$.

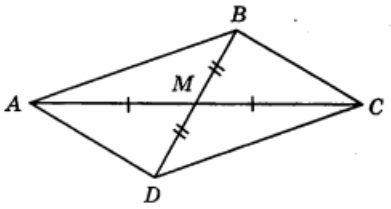
Решение. Перемножим: $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})}{4} = \frac{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}{4} = \frac{|\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2}{4}$. По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника, значит, модули этих векторов равны, так как отрезки a и b являются сторонами равнобедренного треугольника. Следовательно, скалярное произведение векторов $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = 0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Следовательно, угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен $90°$.

12. Ответ: $0°$.

Решение. Обозначим угол между векторами α. По определению скалярного произведения векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$. По условию $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, следовательно, $\cos\alpha = 1$. Значит, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен нулю.

Часть 3

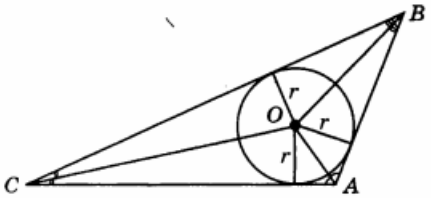
13. Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.



Решение. Пусть для определенности в треугольнике ABC: $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $AC = 8$ см. Тогда угол ABC — наибольший, так как лежит напротив большей стороны AC, равной 8 см. Проведем медиану BM и отложим на ее продолжении отрезок MD, равный BM. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его диагонали AC и BD пересекаются в точке M и делятся ее пополам. В параллелограмме $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Поскольку $BD = 2BM$, получим:

$$BM = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{50 + 32 - 64}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (см)}.$$

14. Ответ: центр вписанной в треугольник окружности ближе к вершине A.



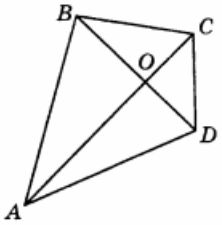
Решение. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, значит, точка O является точкой пересечения биссектрис треугольника.

Рассмотрим треугольник AOB. Так как $\angle A > \angle B$, то угол OAB, равный $\frac{1}{2}\angle A$, больше угла OBA, равного $\frac{1}{2}\angle B$.

Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $OB > OA$. Аналогично, из треугольника AOC получим, что $OC > OA$.

Из того, что $OB > OA$ и $OC > OA$ следует, что OA — наименьшее из расстояний от центра вписанной окружности до вершин треугольника.

15. Решение. Так как $AC \perp BD$, то треугольники AOB, AOD, BOC и DOC — прямоугольные. Поэтому по теореме Пифагора:



$AB^2 = AO^2 + BO^2$, $BC^2 = OC^2 + BO^2$,

$CD^2 = OC^2 + OD^2$, $AD^2 = OC^2 + OD^2$.

Отсюда $AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + OC^2 + OD^2$ и

$BC^2 + AD^2 = BO^2 + OC^2 + AO^2 + OD^2$,

т.е. $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

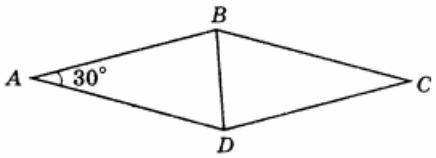
Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 2.

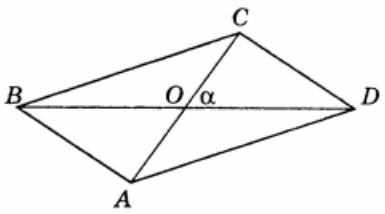
Решение. По определению $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60°$, $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30°$. Следовательно, $b \cdot \sin 120° + b \cdot \cos 150° + b \cdot \sin 90° = b \cdot \sin 60° + b \cdot (-\cos 30°) + b \cdot \sin 90° = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + b \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b = b \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b = b$.

2. Ответ: 4.



Решение. По условию в ромбе $ABCD$ $\angle ABC = 150°$, значит, $\angle BAD = 30°$. В ромбе все стороны равны, т. е. $AB = AD$. Отсюда $S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD\sin 30°$, а $S_{ABCD} = AB \cdot AD\sin 30° = 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 18$ (см^2).

3. Ответ: 3.



Решение. В треугольниках BOC и COD: $BO = OD$, OC — общая, а углы BOC и COD дополняют друг друга до $180°$. Сторона BC лежит против тупого угла BOC, косинус которого отрицателен. Пусть $\angle BOC = \alpha$, тогда из теоремы косинусов следует, что $BC = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC\cos\alpha}$; $CD = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC\cos(180 - \alpha)}$. Следовательно, $BC > CD$.

4. Ответ: 2.

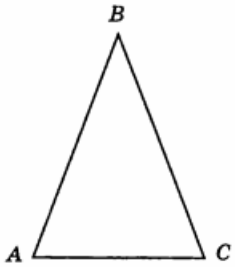
Решение. Вначале проверим, существует ли треугольник с такими сторонами. Стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника $0{,}3 + 0{,}4 > 0{,}5$. Из теоремы косинусов следует, что если сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, тупой, если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, острый. Так как $0{,}3^2 + 0{,}4^2 = 0{,}5^2$, то здесь применима теорема, обратная теореме Пифагора, т.е. треугольник — прямоугольный.

5. Ответ: 1.

Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ буквами x_1 и x_2, координаты вектора $\bar{a}$ — a_1 и a_2, координаты вектора $\bar{b}$ — b_1 и b_2. Так как $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, то $x_1 = b_1 - \frac{1}{2}a_1 = 1 + 1 = 2$; $x_2 = b_2 - \frac{1}{2}a_2 = -0{,}5$. Таким образом $\bar{c}(2; -0{,}5)$.

Часть 2

6. Ответ: $8\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (см).



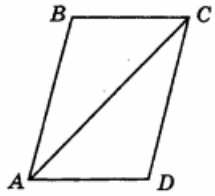
Решение. В силу теоремы косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$. Так как $135° = 180° - 45°$, то

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(180° - 45°)$;

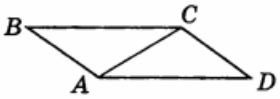
$AC^2 = 64 + 64 + 2 \cdot 64 \cdot \cos 45° = 128 + 2 \cdot 64 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 128 + 64\sqrt{2} = 64(2 + \sqrt{2})$, $AC = 8\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (см).

7. Ответ: $30°$.



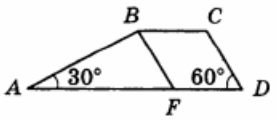
Решение. Данная диагональ и две стороны параллелограмма удовлетворяют неравенству треугольника. В силу теоремы косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$; $7 = 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos\alpha$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, угол, лежащий против данной диагонали, — тупой и равен $150°$. Значит, меньший угол параллелограмма равен $30°$.

8. Ответ: $4\sqrt{\frac{3}{2}}$ (см).



Решение. По условию $\angle BAC = 60°$ и $\angle CAD = 45°$. Так как в параллелограмме $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, то $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Таким образом, в треугольнике BAC $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$ и сторона AB равна на 4 см, как лежащая против меньшего угла. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$; отсюда $BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{\frac{3}{2}}$ (см).

9. Ответ: $\sqrt{3}$.



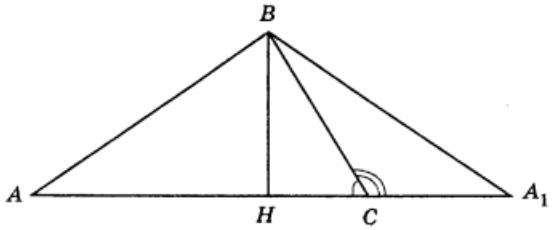
Решение. В трапеции $ABCD$ проведем прямую BF, параллельную CD. Углы BFA и CDA равны как накрест лежащие при параллельных прямых BF и CD и секущей AD. Треугольник ABF — прямоугольный, так как $\angle BAC = 30°$, а $\angle BFA = 60°$. По теореме синусов $\frac{AB}{BF} = \frac{AB}{CD} =$

$$= \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

10. Ответ: два решения.

Решение. Применим теорему синусов $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, $\frac{8}{0,4} = \frac{16}{\sin A}$, $\sin A = 0,8$. Существуют два угла с таким синусом, острый и тупой.

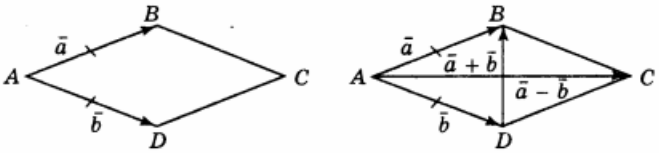
Соответствующий тупоугольный треугольник получается из остроугольного, данного на чертеже, если отразить сторону AB относительно высоты BH.



11. Ответ: 90°.

Решение. Перемножим: $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})}{4} = \frac{\bar{a}^2-\bar{b}^2}{4} = \frac{|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2}{4}$.

По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине ромба, а их концы находятся в соседних вершинах этого ромба, то модули этих векторов равны, так как отрезки a и b являются сторонами ромба. Значит, скалярное произведение векторов $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = 0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов следует, что если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Следовательно, угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен 90°.

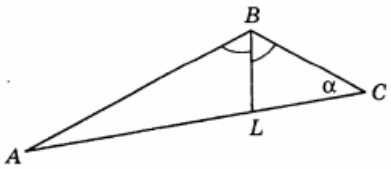


12. Ответ: 3.

Решение. По условию векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, т. е. угол между ними равен 0°. По определению скалярного произведения векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$, $\cos 0° = 1$, Значит, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = 3 \cdot 1 = 3$.

Часть 3

13. Ответ: 4 см.



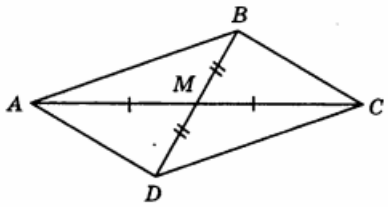
Решение. Пусть для определенности в треугольнике ABC: $AB = 6$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$. Сторона AC — наибольшая, так как она лежит против тупого угла. По теореме косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120° = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot (-0,5) = 252$; $AC = 6\sqrt{7}$ (см).

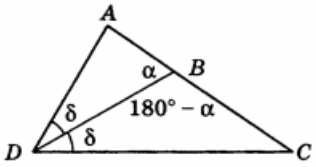
Проведем к стороне AC биссектрису BL. По свойству биссектрисы угла треугольника: $\frac{AL}{CL} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, поэтому $CL = 2AL$. Точка L принадлежит стороне AC, значит, $AC = AL + CL = 3CL$, $CL = 2\sqrt{7}$ (см). Обозначим угол BAC буквой α. По теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$, отсюда $\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{36 + 252 - 144}{2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. Из треугольника ABL по теореме косинусов находим:

$$BL^2 = AB^2 + AL^2 - 2 \cdot AB \cdot AL \cdot \cos\alpha = 36 + 28 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} = 16;\ BL = 4 \text{ (см)}.$$

14. Ответ: $60°$.



Решение. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 10 см и 6 см соответственно, точка M — середина стороны AC, медиана BM равна 7 см. Продолжим медиану BM на ее длину и соединим получившуюся точку D с вершинами A и C. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его диагонали AC и BD пересекаются в точке M и делятся ее пополам. Рассмотрим треугольник ABD: $AD = BC = 6$ см, $AB = 10$ см и $BD = 14$ см, Из треугольника ABD, используя теорему косинусов, находим: $\cos\angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{100 + 36 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 6} = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle BAD = 120°$, тогда $\angle ABC = 180° - \angle BAD = 60°$, так как эти углы прилегают к одной стороне параллелограмма.



15. Решение Обозначим $\angle ADC = 2\delta$, а $\angle ABD = \alpha$. Тогда $\angle ADB = \angle BDC$, так как DB — биссектриса ADC; а $\angle CBD = 180° - \alpha$. Теперь применим теорему синусов к треугольникам ADB и BDC: $\frac{AB}{\sin\delta} = \frac{AD}{\sin\alpha}$; $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$; $\frac{BC}{\sin\delta} = \frac{BD}{\sin(180° - \alpha)}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$; отсюда $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.