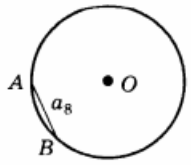
Вариант 1

Часть 1

1. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника в два раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

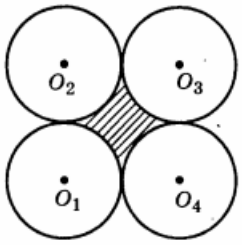
1. 3; 2. 4; 3. 6; 4. 8.

2. В окружности с радиусом 5 см хорда AB является стороной правильного восьмиугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.



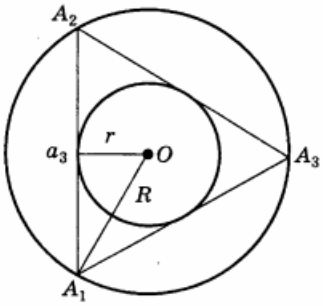
1. $\frac{5\pi}{2}$ см; 2. $\frac{5\pi}{4}$ см; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см; 4. $\frac{5\pi}{3}$ см.

3. Четыре равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.



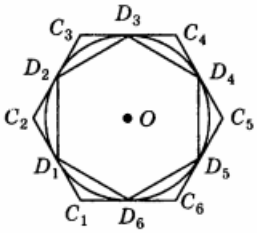
1. 16π см^2;
2. 64π см^2;
3. $(1 - \pi)$ см^2;
4. $16(4 - \pi)$ см^2.

4. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника, если радиус вписанной в него окружности 3 см.



1. $6\sqrt{3}$ см;
2. 1,5 см;
3. 6 см;
4. $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

5. Найдите отношение стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, к стороне правильного шестиугольника, описанного около нее.

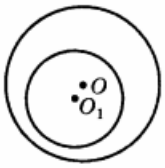


1. $\frac{1}{2}$; 3. 2;

2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

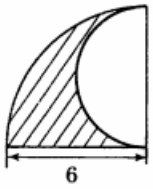
Часть 2

6. Внутри круга радиуса $R = 6$ см проведена окружность, делящая его на две равновеликие фигуры. Найдите ее радиус.



_____

7. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.

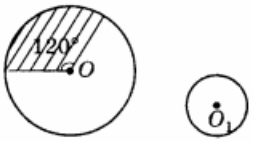


_____

8. Определите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона 6 см, а радиус вписанной окружности $3\sqrt{3}$ см.

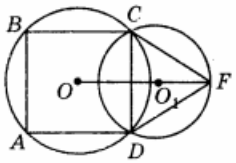
---

9. Дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному $120°$. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите отношение радиусов окружностей.



---

10. Отрезок CD является общей хордой двух пересекающихся окружностей таким образом, что их центры лежат по разные стороны от хорды CD. При этом для окружности с центром в точке O эта хорда является стороной вписанного квадрата, а для окружности с центром в точке O_1 эта хорда является стороной правильного вписанного треугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если сторона квадрата равна 3 см.

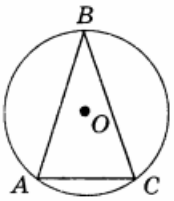


---

11. В треугольнике ABC, стороны которого равны 25 см, 26 см и 3 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

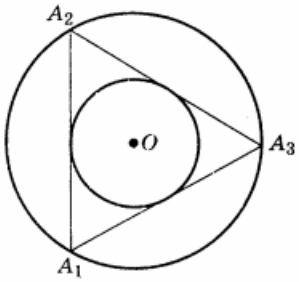
---

12. Около равнобедренного треугольника ABC, основание которого равно 24 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности, если боковая сторона треугольника равна 13 см.



Часть 3

13. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного треугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону треугольника.



14. Определите, для каких правильных n-угольников сторона меньше радиуса описанной окружности.

15. В равнобочную трапецию с острым углом $30°$ вписана окружность. Найдите отношение длины окружности к периметру трапеции.

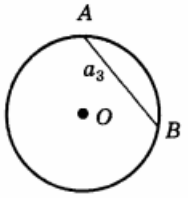
Вариант 2

Часть 1

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внутренних углов равен 165°?

1. 3; 2. 7; 3. 24; 4. 15.

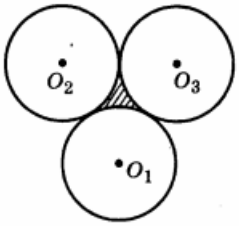
2. В окружности с радиусом 5 см хорда AB является стороной правильного треугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.



1. $\frac{5\pi}{2}$ см; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см;

2. $\frac{5\pi}{3}$ см; 4. $\frac{5\pi}{4}$ см.

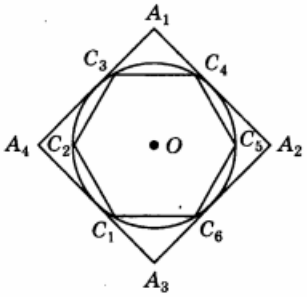
3. Три равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.



1. $16(2\sqrt{3} - \pi)$ см^2; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см^2;

2. $\frac{5\pi}{3}$ см^2; 4. $\frac{5\pi}{4}$ см^2.

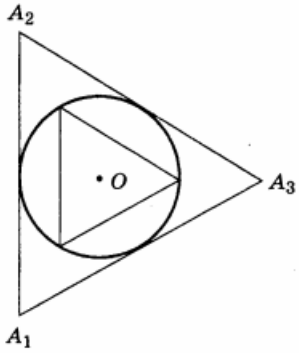
4. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности, если сторона правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна 3 см.



1. 4,5 см; 3. $3\sqrt{3}$ см;

2. 6 см; 4. $3\sqrt{2}$ см.

5. Найдите отношение стороны правильного треугольника, описанного около окружности, к стороне правильного треугольника, вписанного в нее.

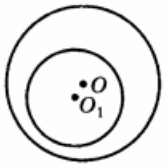


1. $\frac{1}{2}$; 3. 2;

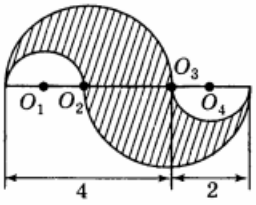
2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Часть 2

6. Внутри круга радиуса R проведена окружность радиуса r, делящая его на две фигуры. При этом площадь фигуры, ограниченной окружностями радиусов R и r, в три раза больше площади круга радиуса r. Найдите радиус r, если радиус R равен 6 см.

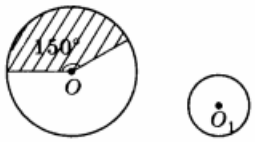


7. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.

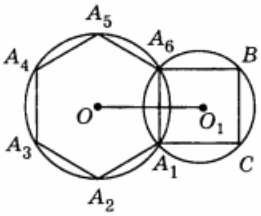


8. Определите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона равна 2 см, а радиус описанной окружности $\sqrt{2}$ см.

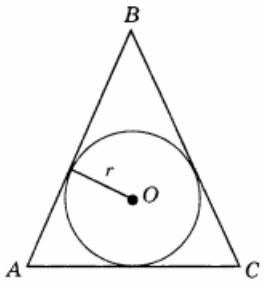
9. Дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному 150°. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите радиус окружности с центром в точке O, если радиус окружности с центром в точке O_1 равен 6 см.



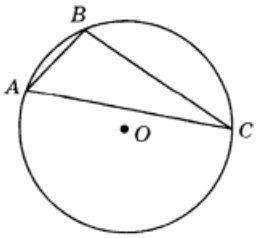
10. Отрезок A_1A_6 является общей хордой двух пересекающихся таким образом окружностей, что их центры лежат по разные стороны от хорды A_1A_6. При этом для окружности с центром в точке O эта хорда является стороной правильного вписанного шестиугольника, а для окружности с центром в точке O_1 эта хорда является стороной вписанного квадрата. Найдите расстояние между центрами окружностей, если сторона шестиугольника равна 6 см.



11. В равнобедренный треугольник ABC, основание которого равно 14 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности, если боковая сторона треугольника равна 25 см.

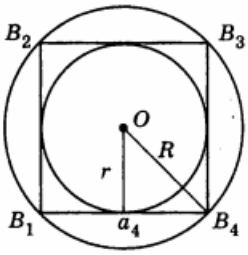


12. Около треугольника ABC, стороны которого равны 15 см, 14 см и 13 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности.



Часть 3

13. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного четырехугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону четырехугольника.



14. Для каких правильных n-угольников половина стороны не меньше, чем радиус вписанной окружности?

15. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

Ответы и решения.

Вариант 1

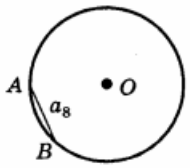
Часть 1

1. Ответ: 1.

Решение. Так как многоугольник — выпуклый, то по теореме о сумме углов выпуклого многоугольника сумма его внутренних углов равна $180°(n-2)$, а сумма его внешних углов равна $360°$, то по условию: $180° \cdot (n-2) = 180°$; $180° \cdot n - 360° = 180°$; $180° \cdot n = 540°$; $n = 3$.

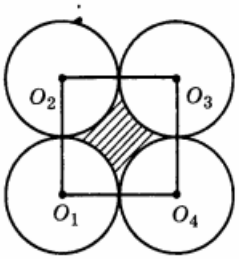
2. Ответ: 2.

Решение. Так как хорда AB является стороной правильного восьмиугольника, то центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен $45°$. Используем формулу $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot 45°$, получаем $l = \frac{5\pi}{4}$ (см).



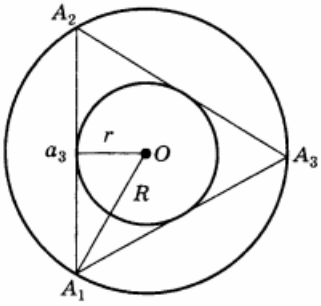
3. Ответ: 4.

Решение. Соединим центры окружностей и получим квадрат $O_1O_2O_3O_4$, сторона которого равна 8 см, так как равные окружности попарно касаются внешним образом, и значит, расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади квадрата и четырех круговых секторов, каждый из которых соответствует центральному углу, равному $90°$. Значит, в сумме они составляют круг радиуса 4 (см). Площадь квадрата $S_{квадрат} = a^2$, равна площадь круга $S_{круг} = \pi R^2$. Таким образом, $S = S_{квадрат} - S_{круг} = a^2 - \pi R^2 = 8^2 - 4^2\pi = 16(4-\pi)$.



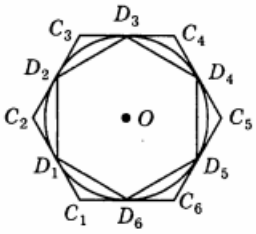
4. Ответ: 3.

Решение. Сторона правильного треугольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_3 = 2r\sqrt{3}$. Сторона правильного треугольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_3 = R\sqrt{3}$. Отсюда $2r\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, $R = 2r = 6$ (см).



5. Ответ: 4.

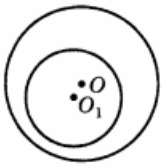
Решение. Сторона шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{впис} = R$; а сторона шестиугольника, описанного около этой окружности, равна $a_{опис} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Следовательно, отношение сторон вписанного и описанного шестиугольников $\frac{a_{впис}}{a_{опис}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



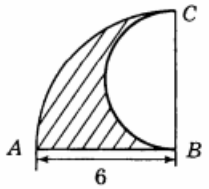
Часть 2

6. Ответ: $3\sqrt{2}$ см.

Решение. Площадь круга, ограниченного окружностью радиуса r, равна $S = r^2$, а площадь фигуры, ограниченной окружностями радиусов R и r, равна разности площади круга, ограниченного окружностью радиуса R, и площади круга, ограниченного окружностью радиуса r, т. е. $S = \pi R^2 - \pi r^2$. По условию $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi r^2$. Отсюда, $r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см).

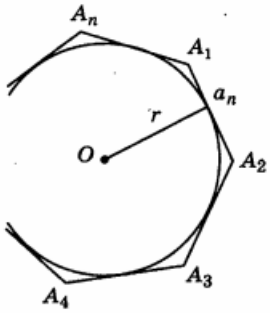


7. Ответ: $6(\pi+1)$.



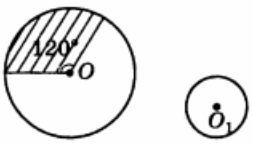
Решение. Длина границы заштрихованной фигуры равна сумме длин полуокружности BC радиуса $r = 3$, дуги четверти окружности AC радиуса $R = 6$, градусная мера которой равно $90°$, и радиуса окружности AB, равного 6. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна $L = \frac{1}{2}(2r) + \frac{1}{4}(2R) + AB = 3\pi + 3\pi + 6 = 6\pi + 6 = 6(\pi + 1)$.

8. Ответ: $60°$.



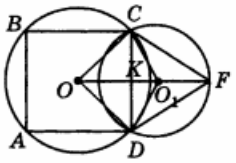
Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. Отсюда, $6 = 6\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, $\operatorname{tg}\frac{180°}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{180°}{n} = 30°$. Следовательно, центральный угол правильного n-угольника равен $60°$.

9. Ответ: $1:3$.



Решение. Длина дуги окружности с центром в точке O, соответствующая $120°$, равна $l = \frac{\pi R}{180°}n = \frac{\pi R}{180°}120° = \frac{2\pi R}{3}$. Длина окружности с центром в точке O_1 равна $2\pi r$. Отсюда $2\pi r = \frac{2\pi R}{3}$. Следовательно, $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$, т.е. $r : R = 1 : 3$.

10. Ответ: $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ (см).

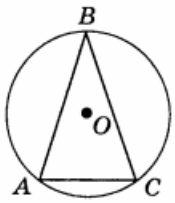


Решение. Соединим точки C и D с центрами окружностей точками O и O_1. Из равенства треугольников OCO_1 и ODO_1 (OC и OD равны, как радиусы окружности с центром в точке O, CO_1 и DO_1 равны, как радиусы окружности с центром в точке O_1, сторона OO_1 — общая) следует, что линия центров OO_1 перпендикулярна хорде CD и делит ее пополам. Обозначим точку пересечения линии центров OO_1 и хорды CD буквой K. По условию для окружности с центром в точке O хорда CD является стороной вписанного квадрата и одновременно является стороной вписанного равностороннего треугольника CFD для окружности с центром в точке O_1, значит, $CD = 3$ (см). Треугольник COD — прямоугольный (диагонали квадрата перпендикулярны) и равнобедренный, значит, $OK = CK = \frac{3}{2}$ (см). В равностороннем треугольнике CFD высота FK (одновременно медиана и биссектриса) принадлежит линии центров и равна $FK = CF \cdot \cos 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения медиан, следовательно, $O_1K = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см). Таким образом, $OO_1 = OK + O_1K = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ (см).

11. Ответ: $\frac{4}{3}$ см.

Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона:
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, полупериметр треугольника $p = 27$ (см). $S = \sqrt{27 \cdot (27-25) \cdot (27-26) \cdot (27-3)} = \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 24} = 36$ (см^2).
С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r – радиус вписанной в него окружности. Значит, $27r = 36$, отсюда $r = \frac{4}{3}$ (см).

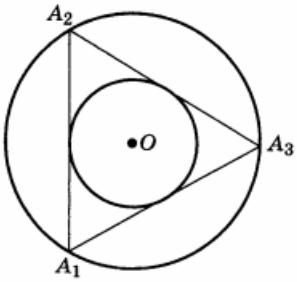
12. Ответ: 16,9 см.



Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = 25$ (см). $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{25 \cdot (25-13) \cdot (25-13) \cdot (25-24)} = \sqrt{25 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 1} = 60$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = \frac{abc}{4R}$, отсюда $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 24}{4 \cdot 60} = 16{,}9$ (см).

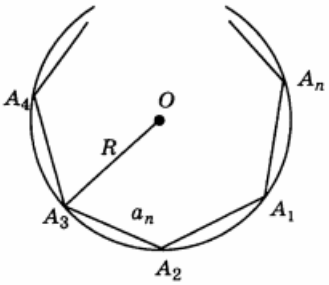
Часть 3

13. Ответ: 2.



Решение. Площадь кольца, ограниченного окружностью, описанной около правильного треугольника, и окружностью, вписанной в него, равна разности площади круга, ограниченного окружностью, описанной около треугольника, и площади круга, ограниченного окружностью, вписанной в треугольник: $S = S_{опис} - S_{впис} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi$. Сторона треугольника, вписанного в окружность радиуса R равна $a_3 = R\sqrt{3}$; а сторона треугольника, описанного около окружности радиуса r, равна $a_3 = 2r\sqrt{3}$. Отсюда $R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$, $R = 2r$. Из полученной формулы для площади кольца $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi$ получаем $R^2 - r^2 = 1$, отсюда $4r^2 - r^2 = 1$, $3r^2 = 1$, $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $a_3 = 2r\sqrt{3} = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 2$.

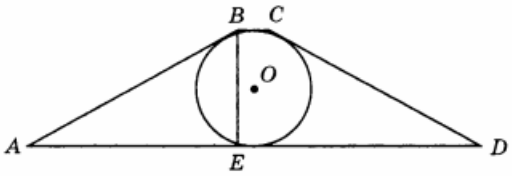
14. Ответ: $n > 6$.



Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. По условию $a_n < R$, т.е. $2R\sin\frac{180°}{n} < R$, следовательно, $\sin\frac{180°}{n} < \frac{1}{2}$. С увеличением острого угла его синус возрастает, поэтому $\frac{180°}{n} < 30°$, т.е. $n > 6$.

15. Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

Решение. В равнобочной трапеции $ABCD$, проведем из вершины B высоту BE, тогда треугольник BAE — прямоугольный, у которого угол BAD равен $30°$. Следовательно, по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, $BE = \frac{1}{2}AB$. С другой стороны, так



как в трапецию $ABCD$ вписана окружность, то $BE = 2R$, значит, $AB = 4R$. По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC$. Так как трапеция $ABCD$ — равнобочная, то $AB = CD$, следовательно, периметр трапеции $P_{трап} = 4AB = 16R$. Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$. Следовательно, $\frac{C}{P} = \frac{2\pi R}{16R} = \frac{\pi}{8}$.

Вариант 2

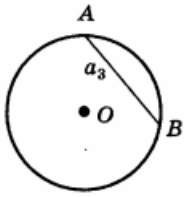
Часть 1

1. Ответ: 3.

Решение. Так как сумма внешнего и внутреннего углов при одной вершине равна $180°$, то каждый из его внешних углов равен $15°$. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$, тогда многоугольник имеет $360 : 15 = 24$ вершины.

2. Ответ: 3.

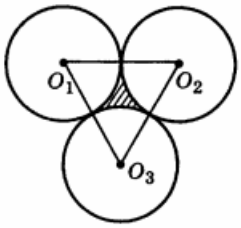
Решение. Так как хорда AB является стороной правильного треугольника, то центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен $120°$. Используем формулу $l = \frac{\pi R}{180°} 120°$, получаем $l = \frac{10\pi}{3}$ (см).



3. Ответ: 1.

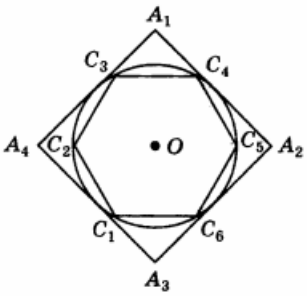
Решение. Соединим центры окружностей и получим равносторонний треугольник $O_1O_2O_3$, сторона которого равна 8 см, так как равные окружности попарно касаются внешним образом, и значит, расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади треугольника и трех круговых секторов, каждый из которых соответствует центральному углу, равному $60°$. Значит, в сумме они составляют полукруг радиуса 4 см. Площадь равностороннего треугольника равна $S_{треугольник} = \frac{1}{2}a^2\sin 60°$, площадь полукруга $S_{полукруг} = \frac{1}{2}\pi R^2$. Таким образом, $S = S_{треугольник} - S_{полукруг} =$

$= \frac{1}{2}a^2\sin 60° - \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}64\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}16\pi = 16\sqrt{3} - 8\pi = 8(2\sqrt{3} - \pi)$ (см^2).



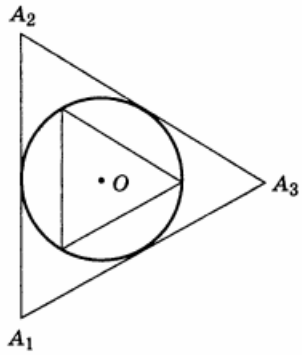
4. Ответ: 2.

Решение. Сторона квадрата (правильного четырехугольника) выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_4 = 2r$. Сторона правильного шестиугольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_6 = R$. Так как окружность одновременно является вписанной в правильный четырехугольник и описанной около правильного шестиугольника, то $R = r$. Отсюда $a_4 = 2r = 2R = 6$ (см).



5. Ответ: 3.

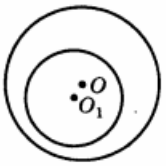
Решение. Сторона треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{впис} = R$, а сторона треугольника, описанного около этой окружности, равна $a_{опис} = 2r$. Так как окружность одновременно является вписанной в правильный четырехугольник и описанной около правильного шестиугольника, то $R = r$. Следовательно, отношение сторон описанного и вписанного треугольника $\frac{a_{опис}}{a_{впис}} = \frac{2R\sqrt{3}}{R\sqrt{3}} = 2$.



A_1

Часть 2

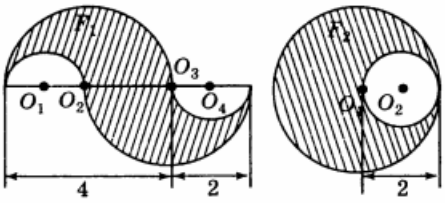
6. О т в е т: 3 см.



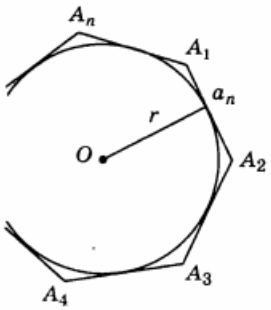
Решение. Площадь круга, ограниченного окружностью радиуса r, равна $S = r^2$, а площадь фигуры, ограниченной окружностями радиусов R и r, равна разности площади круга, ограниченного окружностью радиуса R, и площади круга, ограниченного окружностью радиуса r, т.е. $S = \pi R^2 - \pi r^2$. По условию $\pi R^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$. Отсюда, $\pi R^2 = 4\pi r^2$, $r = \frac{R}{2} = 3$ (см).

7. О т в е т: 6π.

Решение. Заметим, что фигура F_2 может быть получена из фигуры F_1, если фигуру F_1 разрезать по прямой O_1O_4 и сложить из полученных частей фигуру F_2. Длина границы заштрихованной фигуры F_2 равна сумме длин окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами $R = 2$ и $r = 1$. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна $L = 2r + 2R = 2\pi + 4\pi = 6\pi$.

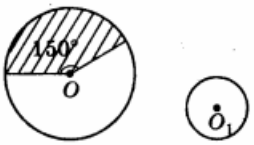


8. О т в е т: $90°$.



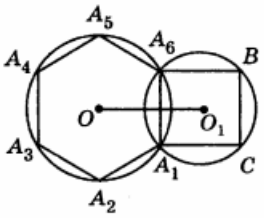
Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. Отсюда, $2 = 2\sqrt{2}\sin\frac{180°}{n}$, $\sin\frac{180°}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{180°}{n} = 45°$. Следовательно, центральный угол правильного n-угольника равен $90°$.

9. О т в е т: 2,5 см.



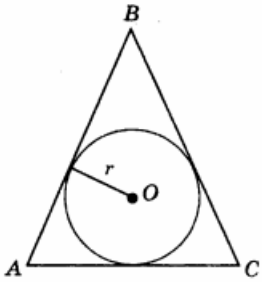
Решение. Длина дуги окружности с центром в точке O, соответствующей центральному углу, равному $150°$, равна $L = \frac{\pi R}{180°}n = \frac{\pi 6}{180°}150° = 5\pi$. Длина окружности с центром в точке O_1 равна $l = 2\pi r = 5\pi$. Следовательно, $r = 2{,}5$ (см).

10. Ответ: $3(1+\sqrt{3})$ см.



Решение. Соединим точки A_1 и A_6 с центрами окружностей точками O и O_1. Из равенства треугольников OA_1O_1 и OA_6O_1 (OA_1 и OA_6 равны, как радиусы окружности с центром в точке O, A_1O_1 и A_6O_1 равны, как радиусы окружности с центром в точке O_1, сторона OO_1 — общая) следует, что линия центров OO_1 перпендикулярна хорде A_1A_6 и делит ее пополам. Обозначим точку пересечения линии центров и хорды A_1A_6 буквой K. По условию для окружности с центром в точке O хорда A_1A_6 является стороной вписанного правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и одновременно является стороной вписанного квадрата для окружности с центром в точке O_1, значит, сторона квадрата равна 6 см. Треугольник $A_1O_1A_6$ — прямоугольный (диагонали квадрата перпендикулярны) и равнобедренный, значит, $O_1K = 3$ см. В равностороннем треугольнике A_1OA_6 высота OK (одновременно медиана и биссектриса) принадлежит линии центров и равна $OK = OA_6 \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$ (см). Таким образом, $OO_1 = OK + O_1K = 3(1+\sqrt{3})$ (см).

11. Ответ: 5,25 см.

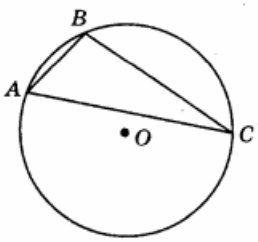


Решение. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то в треугольнике известны три стороны, и площадь треугольника ABC можно найти по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где полупериметр треугольника $p = 32$ (см).

$S = \sqrt{32 \cdot (32-25) \cdot (32-25) \cdot (32-14)} = \sqrt{32 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 18} = 168$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Значит, $32r = 168$, отсюда $r = 5{,}25$ (см).

12. Ответ: 8,125.

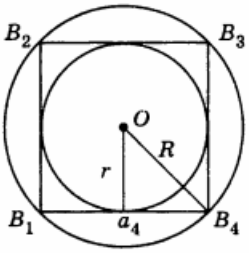


Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = 21$ (см).

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = \frac{abc}{4R}$, отсюда $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125$ (см).

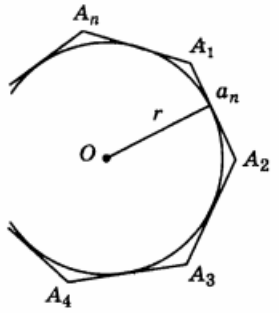
Часть 3

13. Ответ: 2.



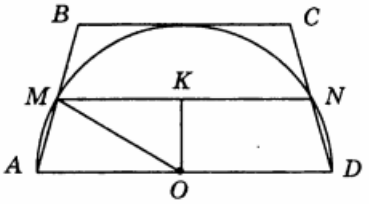
Решение. Площадь кольца, ограниченного окружностью, описанной около правильного четырехугольника, и окружностью, вписанной в него, равна разности площади круга, ограниченного окружностью, описанной около квадрата, и площади круга, ограниченного окружностью, вписанной в квадрат $S = S_{опис} - S_{впис} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi$. Сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_4 = R\sqrt{2}$; а сторона квадрата, описанного около окружности радиуса r, равна $a_4 = 2r$. Отсюда $R\sqrt{2} = 2r$, $R = r\sqrt{2}$. Из полученной формулы для площади кольца $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi$ получаем $R^2 - r^2 = 1$, $2r^2 - r^2 = r^2 = 1$, $r = 1$. Отсюда $a_3 = 2r = 2$.

14. Ответ: $n \leqslant 4$.



Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. По условию $\frac{1}{2}a_n \geqslant r$, т. е. $r\operatorname{tg}\frac{180°}{n} \geqslant r$, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{180°}{n} \geqslant 1$. С увеличением острого угла его тангенс возрастает, поэтому $\frac{180°}{n} \geqslant 45°$, т.е. $n \leqslant 4$.

15. Ответ: 75° и 105°.



Решение. В трапеции $ABCD$ точки O, M, N и K являются серединами отрезков AD, AB, CD и MN соответственно. Тогда трапеция $AMND$ вписана в данную окружность, следовательно, эта трапеция — равнобокая. Так как отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то и трапеция $ABCD$ — равнобокая. $\angle OKM = 90°$ так как точка K принадлежит радиусу, проведенному в точку касания, следовательно, треугольник OMK является прямоугольным. $OK = \frac{1}{2}r$ так как точка K принадлежит средней линии трапеции, отсюда $OK = \frac{1}{2}OM$. Значит, $\angle KMO = 30°$; $\angle KMO = \angle AOM = 30°$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и MN и секущей OM. А так как $OA = OM$, то $\angle MAO = 75°$. Отсюда получим, что $\angle A = \angle D = 75°$; $\angle B = \angle C = 105°$.